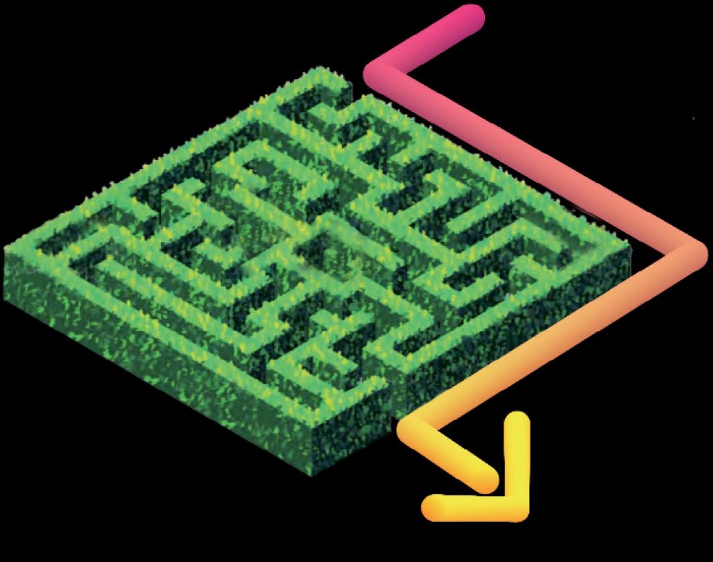
Marcus du Sautoy

UMĚNÍ ZKRATKY

Jak lépe myslet



argo / dokořán

Marcus du Sautoy

UMĚNÍ ZKRATKY

Jak lépe myslet

ARGO / DOKOŘÁN

Marcus du Sautoy

UMĚNÍ ZKRATKY

Jak lépe myslet

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu *Thinking Better: The Art of the Shortcut*
přeložil Petr Holčák.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Redakce Klára Soukupová.
Obálka a sazba podle návrhu Pavla Růta
a konverze do elektronické verze Michal Puhač.
Vydalo v roce 2025 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5,
dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 1 327. publikaci (458. elektronická).

ISBN 978-80-7675-237-5

Všem učitelům matematiky, zejména panu Bailsonovi,
který mi jako první ukázal matematickou zkratku.

OBSAH

	Vyrážíme na cestu	9
1. ZKRATKA:	Vzorec	21
Zastávka:	Hudba	41
2. ZKRATKA:	Počítání	45
Zastávka:	Startup	61
3. ZKRATKA:	Jazyk	65
Zastávka:	Paměť	83
4. ZKRATKA:	Geometrie	87
Zastávka:	Výstup na horu	105
5. ZKRATKA:	Diagram	111
Zastávka:	Ekonomie	131
6. ZKRATKA:	Kalkulus	137
Zastávka:	Umění	157
7. ZKRATKA:	Data	163
Zastávka:	Terapie	179
8. ZKRATKA:	Pravděpodobnost	185
Zastávka:	Finance	201
9. ZKRATKA:	Sítě	205
Zastávka:	Neurověda	221
10.	Když je zkratka nemožná	225
	V cíli cesty	247
	Poděkování	251
	Rejstřík	253

VYRÁŽÍME NA CESTU

Vydali jsme se na cestu a máme před sebou dvě možnosti. Půjdeme-li obvyklou trasou, čeká nás úmorné trmácení a nenarazíme na žádné hezké vyhlídky. Cesta nám bude trvat celou věčnost, budeme dočista vyčerpaní, nakonec se ale dopotácíme do cíle. Existuje ale i druhá trasa. Budeme-li pozorní, zahlédneme ji, jak uhýbá od hlavní stezky a zdánlivě se od cíle vzdaluje. Pak si všimneme ukazatele s nápisem „zkratka". Slibuje nám to rychlejší postup mimo hlavní trasu, jímž cíle dosáhneme dříve, a přitom s mnohem menší námahou. Tato druhá trasa dokonce nabízí úchvatné pohledy do krajiny. Je na ní jen zapotřebí zůstat ve střehu, abychom nesešli ze správné cesty. Je to na nás. Tato kniha chce čtenáře nasměrovat právě touto druhou cestou. Měla by se jim stát zkratkou k jednoduššímu myšlení, které jim pomůže proplést se nástrahami neobvyklé stezky a dostat se úspěšně k cíli.

Právě lákadlo takové zkratky ve mně probudilo touhu stát se matematikem. Jako vcelku líného mladíka mě vždy zajímalo, jak dosáhnout cíle co nejefektivnějším možným způsobem. Nebylo to tak, že bych se chtěl životem proflákat. Chtěl jsem jen dosáhnout svého cíle s co nejmenší námahou. Když mi tedy učitel matematiky pan Bailson v mých dvanácti ukázal, že předmět, který vyučuje, je ve skutečnosti oslavou zkratky, nastražil jsem uši. Začalo to prostým příběhem o devítiletém chlapci jménem Carl Friedrich Gauss. Učitel nás v něm přenesl do roku 1786 a do školní třídy v dolnosaském městě Braunschweigu, kde Gauss vyrůstal. Bylo to malé městečko a jediný učitel místní školy, jistý pan Büttner, se musel v jedné třídě postarat o výuku stovky místních dětí.

Náš pan učitel byl mrzutý Skot, který si zakládal na přísné disciplíně, ve srovnání s Herr Büttnerem však byl hotové dobračisko. Gaussův učitel hrozivě kráčel mezi lavicemi a pořádek mezi zlobivými žáky si vynucoval rákoskou. Samotná Büttnerova třída, kterou jsem později v rámci svého putování po místech spjatých s matematikou navštívil, byla pochmurná a tmavá místnost s nízkým stropem a nerovnou podlahou. Vypadalo to tam jako ve středověkém žaláři a tomu podle všeho odpovídal i jeho režim výuky.

Vypráví se, že jednou při hodině počtů Büttner zadal třídě velmi úmorný úkol, kterým chtěl žáky na nějakou dobu zaměstnat, aby si mohl zdřímnout. „Žáci… chci, abyste na svých psacích tabulkách sečetli čísla od 1 do 100," nařídil žákům. „Jakmile budete hotovi, přinesete tabulky na stůl."

Než to učitel dořekl, Gauss už byl na nohou, došel ke stolu, položil na něj svou tabulku a dolnoněmecky pronesl: „*Ligget se.*“ – „Tady to je.“ Büttner se na chlapce nevěřícně podíval, šokován jeho drzostí. Rákoska v jeho ruce se rozkmitala, učitel se ale rozhodl, že s výpraskem malého Gausse počká, až mu tabulky předloží ke kontrole i ostatní žáci. Zbytek třídy nakonec úkol dokončil a na Büttnerově stole se navršila věž z tabulek plných křídou psaných výpočtů. Učitel se dal do jejich kontrolování a začal tabulkou, která ležela nejvýše. Většina výpočtů byla chybná, protože žáci se během dlouhého počítání vždy někde spletli.

Nakonec se Büttner propracoval ke Gaussově tabulce. Užuž se chystal mladého chytráka seřvat, když ale břidlicovou tabulku otočil, uviděl správnou odpověď: 5 050. Nikde přitom nebyly vidět žádné pomocné výpočty. Büttner byl v šoku. Jak mohl tak malý kluk dojít tak rychle ke správnému výsledku?

Uvádí se, že předčasně vyspělý žák si povšiml zkratky, která mu pomohla vyhnout se úmornému počítání. Uvědomil si totiž, že když se sečtou všechna čísla v protilehlých párech:

$$1 + 100,$$
$$2 + 99,$$
$$3 + 98,$$
$$\dots,$$

je výsledek vždy 101. Těchto párů je přitom 50. Řešení tudíž zní

$$50 \times 101 = 5\,050.$$

Vzpomínám si, jak mě to vyprávění uchvátilo. Způsob, jímž se Gaussovi podařilo zkrátit si celý zdlouhavý a pracný výpočetní postup, byl pro mě učiněným zjevením.

Přestože je historka o školáku Gaussovi nejspíš legendou, nádherně vystihuje jednu důležitou věc: matematika je obor, jehož podstatou není úmorné počítání, ale strategické myšlení.

„Toto, milí žáci, je matematika,“ prohlásil náš učitel na závěr svého vyprávění. „Umění zkratky.“

Vítej, myšlenko z doby, kdy mi bylo dvanáct... pověz mi víc!

JAK SE RYCHLEJI DOSTAT DÁL

Zkratky používáme neustále. Musíme. Na rozhodování totiž máme obvykle jen krátkou dobu. Musíme se vyrovnávat se složitými problémy a máme na to jen omezené duševní schopnosti. Jednou z prvních strategií, které jsme si vyvinuli pro řešení komplikovaných úkolů, byla heuristika: postup, který zjednodušuje problémy tím, že vědomě či nevědomě ignoruje některé informace, jež náš mozek dostává.

Potíž je v tom, že heuristika, jak ji lidé běžně používají, většinou vede ke špatným úsudkům a předpojatým rozhodnutím, a k řešení složitých úkolů proto obvykle není vhodná. Z vlastní zkušenosti třeba něco víme a takto získanou znalost pak vztahujeme na všechny ostatní problémy, s nimiž se setkáme. Známe to lokální a z jeho hlediska posuzujeme to globální. To mohlo fungovat vcelku dobře, dokud naše okolní prostředí nesahalo příliš daleko za horizont malého kusu savany, který jsme obývali. Jakmile se ale naše okolí rozšířilo, tyto způsoby heuristického uvažování přestaly být vhodným prostředkem ke smysluplnému porozumění tomu, co naše místní znalosti přesahuje. To byla chvíle, kdy jsme si začali vyvíjet důvtipnější zkratky. Takovým nástrojům dnes říkáme matematika.

Máme-li podobné zkratky nalézt, musíme být schopni vymanit se z geografie, v níž se pohybujeme. Pohybujeme-li se ve volné krajině, můžeme se často opřít o to, co vidíme kolem sebe. Přestože ale máme pocit, že každý náš krok vede správným směrem, výsledná trasa může znamenat dlouhou okliku k cíli, nebo nás může svést z cesty úplně. Lidé si proto vyvinuli lepší způsoby usuzování: využili schopnosti odhlížet od detailů aktuálně vykonávaného úkolu a díky tomu zjistili, že mohou existovat nečekané stezky, jimiž se lze dostat k cíli s vynaložením menší námahy, a přitom rychleji.

Právě to udělal Gauss, když učitel zadal třídě svůj úkol. Zatímco ostatní žáci se pustili do zdlouhavého přičítání jednoho čísla ke druhému, Gauss uviděl problém v jeho celku a pochopil, jak využít k jeho vyřešení začátek a konec celé cesty.

Celá matematika se zakládá na využití této schopnosti uvažovat na vyšší úrovni tam, kde napohled vidíme jen náhodně se proplétající pěšiny. Jde o to, pozvednout se nad krajinu tak, abychom na ni hleděli z velké výšky a spatřili její celkovou podobu. Jestliže takto přistupujeme k problémům, objeví se zkratky. Jakmile jsme začali využívat vlohy spatřit vnitřním zrakem strukturu, aniž bychom se s ní fyzicky setkali, uvolnila tato schopnost abstraktního myšlení cestu k mimořádnému a staletí trvajícímu pokroku lidské civilizace.

Cesta k efektivnějšímu uvažování započala před pěti tisíciletími v oblastech kolem řek Nil a Eufrat. Lidé si tam chtěli osvojit důmyslnější způsoby budování městských států, které začaly kolem těchto řek vznikat. Kolik kamenných kvádrů je zapotřebí k postavení pyramidy? Jakou rozlohu půdy je nutné obdělávat, má-li uživit město? Jaké změny ve stavu říční hladiny jsou ukazateli blížící se záplavy? Ti, kdo disponovali nástroji pro nacházení zkratek k řešení těchto úkolů, byli také těmi, kteří v těchto nově vznikajících společnostech získali přední pozice. Úspěch matematiky jako zkratky k rychlému rozvoji těchto civilizací učinil z tohoto oboru mocnou páku pro všechny, kteří si přáli dostat se rychleji dál.

Matematické objevy pak opakovaně vedly k urychlování civilizačního rozvoje. Exploze matematického zkoumání od dob renesance, která přinesla takové objevy jako infinitezimální počet čili kalkulus, zajistila dosud nevídané zkratky k účinným technickým řešením. Dnes pak stojí matematika za všemi algoritmy, s jejichž pomocí nás počítače provádějí digitální džunglí a doslova nám zkracují cestu při hledání optimální přepravní trasy, nejlepších webových stránek při internetovém vyhledávání, a dokonce i k nejlepším partnerům pro cestu životem.

Zajímavé ovšem je, že lidé nebyli první, kdo začal schopnosti matematiky najít nejlepší cestu ke zvládnutí daného úkolu využívat. Příroda používala matematické zkratky k řešení problémů dávno předtím, než jsme na scénu přišli my. Mnohé fyzikální zákony jsou založeny na tom, že příroda si vždy najde optimální zkratku. Světlo cestuje po dráze, po níž se dostane k cíli nejrychleji, i kdyby to znamenalo, že se přitom musí ohýbat kolem velkých objektů, jako je Slunce. Mýdlové bubliny vytvářejí tvary, které odpovídají nejnižší vynaložené energii: většinou je to povrch koule čili sféra, protože tento symetrický tvar má nejmenší povrchovou plochu, a ke svému udržení tak potřebuje nejméně energie. Včely staví šestiúhelníkové plástve, které k udržení svého tvaru spotřebují nejméně vosku. Naše těla si v podobě chůze sama našla energeticky nejefektivnější způsob přepravy z bodu A do bodu B.

Příroda je stejně jako lidé líná, takže hledá řešení vyžadující co nejméně energie. Jak to vyjádřil v 18. století francouzský matematik Pierre Louis Maupertuis: „Příroda je úsporná ve všech svých procesech." Také proto je mimořádně dobrá v objevování zkratek. Má to vždy své matematické opodstatnění. A naše objevy zkratek se často zakládají na pozorování toho, jak daný problém řeší příroda.

CESTA PŘED NÁMI

Tato kniha se chce podělit o arzenál zkratek, který během staletí vyvinuli matematici v čele s Carlem Friedrichem Gaussem. Každá z kapitol představí jiný druh zkratek, které mají odlišné vlastnosti. Cílem všech nicméně je, aby čtenář přestal být někým, kdo se musí při řešení problému těžce dřít, a stal se tím, kdo bude moci svou tabulku odevzdat před všemi ostatními.

Za svého společníka při putování po zkratkách jsem si vybral Gausse. Díky úspěšnému řešení školního úkolu odstartoval životní dráhu, jíž se v mých očích stal knížetem zkratky. Mezi velkým počtem objevů, které během svého života učinil, je i řada zkratek, které si zde probereme.

Rád bych, aby se tato kniha stala – prostřednictvím příběhů o zkratkách, které matematici během doby nashromáždili – pracovní soupravou pro všechny, kdo chtějí ušetřit čas při vykonávání jedné činnosti a uspořené chvíle věnovat něčemu zajímavějšímu. Našimi zkratkami lze velmi často řešit i problémy, jejichž povaha nemá na první pohled s matematikou nic společného. Matematika je ale přístup, s jehož pomocí se dokážeme vyznat ve složitém světě a najít si v něm správnou cestu k cíli.

Proto si také matematika zasluhuje své místo mezi základními předměty, jimž se učí na našich školách. Nikoli proto, že by snad bylo naprosto nezbytné, aby občané věděli, jak řešit kvadratickou rovnici. Upřímně řečeno, kdy vlastně člověk takovou věc potřebuje znát? Tím, co je při řešení problémů podstatné, je pochopit moc, jíž algebra a algoritmy disponují.

Naši cestu za efektivnějším myšlením začneme jednou z nejmocnějších zkratek, které kdy matematici vyvinuli: odhalením řádu v chování daného objektu. Tomuto řádu budeme říkat *vzorec*. Takový vzorec často bývá tím nejlepším druhem zkratky. Odhalíme-li vzorec, našli jsme zkratku, která ukazuje, jak budou data pokračovat dál. Tato schopnost identifikovat podstatné pravidlo je základem matematického modelování.

Rolí zkratky často bývá určit základní princip, který sjednocuje celou paletu řešení zdánlivě nesouvisejících problémů. Krása Gaussovy zkratky tkví v tom, že i kdyby učitel úkol ztížil a zadal v něm sečtení čísel do jednoho tisíce nebo milionu, stále by řešení fungovalo stejně. Zatímco přičítání jednoho čísla po druhém by v takovém případě bylo časově mnohem náročnější, na Gaussův trik by to žádný vliv nemělo: kdybychom měli sečíst všechna čísla do jednoho milionu, jen bychom je spojili do 500 000 párů, z nichž každý by měl součet 1 000 001. Obě tato čísla pak už jen vzájemně vynásobíme a hle – máme řešení. Je to jako tunel, který nám umožňuje zkrátit si cestu přes horu: i kdyby byla hora dvakrát vyšší, délku zkratky by to nijak neovlivnilo.

Vysoce účinnou zkratkou je také schopnost vytvářet a měnit různé jazyky. Jazyk algebry nám pomáhá rozpoznávat principy, na nichž je založeno řešení celé řady zdánlivě rozdílných problémů. Jazyk souřadnic převádí geometrii na čísla, díky nimž často uvidíme zkratky, které jsme v geometrickém vyjádření nespatřili. Vytvoření vhodného jazyka může být úžasným nástrojem k porozumění problému. Vzpomínám si, jak jsem jednou zápasil s neobyčejně složitým matematickým systémem, k jehož určení byla zapotřebí celá řada podmínek. Když mi vedoucí mé disertace poradil, „dej tomu jméno“, bylo to pro mě osvobozující zjevení. Pomohlo mi to mé uvažování podstatně zkrátit.

Vždy, když řeknu slovo zkratka, lidé si myslí, že se pokouším nějakým způsobem podvádět. Zní jim to, jako kdybych chtěl něco ošidit a spokojit se se snadným, ale nepřesným řešením; proto je důležité, abychom si hned na začátku zdůraznili, jaký je mezi oběma těmto přístupy rozdíl. Já usiluji vždy o chytřejší cestu ke správnému řešení. Nezajímají mě žádné laciné přibližné odhady. Chci plnohodnotné řešení, ale bez zbytečné dřiny.

Některé zkratky jsou nicméně v zásadě odhady, které jsou dost dobré na to, aby daný problém vyřešily. Sám jazyk je v určitém smyslu zkratkou. Slovo „židle" je kupříkladu zkratkou celé řady různých věcí, na nichž se dá fyzicky (a dokonce i přeneseně) sedět. Není příliš efektivní mít pro každé ztělesnění židle vždy jiné slovo. Jazyk je velmi důmyslnou nízkodimenzionální reprezentací světa kolem nás, která nám umožňuje účinně komunikovat s ostatními a usnadňuje nám pohyb v mnohotvárném světě, v němž žijeme. Bez zkratky v podobě jediného slova pro řadu případů bychom byli zavaleni šumem.

Také si ukážeme, že i v matematice bývá často nezbytnou podmínkou nalezení zkratky pominutí nepodstatných informací. Základní myšlenkou topologie je geometrie bez měření. Pro toho, kdo jede londýnským metrem, bude pro nalezení správné cesty městem plánek ukazující pořadí a propojení jednotlivých stanic mnohem užitečnější než geograficky přesná mapa. Účinnými zkratkami mohou být také diagramy a grafy. Nejlepší z nich odhlížejí od všeho, co je z hlediska pochopení problému vedlejší. Jak si ale ukážeme, mezi dobrou zkratkou a nebezpečnou manipulací bývá často jen tenká hranice.

Jedním z největších vynálezů, jaký lidé pro nacházení zkratek objevili, je kalkulus. Na toto malé matematické kouzlo spoléhají inženýři, kteří potřebují nalézt optimální řešení těžkých technických problémů. Teorie pravděpodobnosti a statistika nám zase poskytují zkratky, díky nimž se dokážeme vyznat v rozsáhlých souborech dat. A matematika nám často dokáže najít nejefektivnější cestu složitou geometrickou strukturou nebo spletitou sítí. Jedním z úžasných objevů, na které jsem přišel, když jsem propadl matematice, byla její schopnost nalézt zkratky i k cestám v nekonečnu. Zkratky, které nás dovedou z jednoho konce nekonečné cesty na druhý.

Kapitoly v knize nezačínají citátem, jak je obvyklé, nýbrž hádankou. K jejímu řešení lze často dojít dvěma způsoby: dlouhou dřinou, nebo zkratkou, pokud ji dokážeme nalézt. Každý z hlavolamů je možné řešit pomocí zkratky, o níž se v příslušné kapitole mluví. Bude dobré, když si hádanku rozlousknete předem, protože často to bývá tak, že čím víc času věnujete úsilí dostat se k cíli, tím víc oceníte zkratku, až si o ní přečtete.

Při svém putování matematikou jsem rovněž objevil, že existují různé druhy zkratek. Je proto nutné zdůraznit, že cesta, na niž se vydáváme a která nám pomůže dostat se k cíli rychleji, může mít více výchozích míst. Jedny zkratky už v terénu jsou a jen čekají, až je využijeme. Potřebovat budeme možná jen ukazatel správného směru nebo správnou mapu. Jsou ale i zkratky, které by bez naší usilovné práce existovat nemohly: prokopat tunel může trvat léta, jakmile je ale hotový, umožňuje dostat se na druhou stranu komukoli. Některé zkratky vyžadují úplně odhlédnout od okolí, v němž se nacházíme: jsou jako červí díry z jedné strany vesmíru na druhou. Dokážeme-li vykročit z mezí běžně vnímaného světa, možná najdeme dimenzi, která nám ukáže, že dvě věci si jsou mnohem blíže, než jsme si mysleli. Existují zkratky, které urychlují cestu, zkratky, které snižují vzdálenost, již musíme urazit, nebo množství energie, které máme vynaložit. Vždy dosáhneme nějaké úspory, kvůli níž má cenu zkratku hledat.

Na své vlastní cestě jsem si ale také uvědomil, že existují situace, kdy zkratka nemá smysl. Někdy třeba nespěcháme a chceme si dát načas. Někdy je pro nás cílem cesta sama. Nebo se pokoušíme zhubnout a potřebujeme energii vydávat. Proč si zkracovat příjemnou procházku v přírodě? Proč si raději nepřečíst celý román a ne jeho výtah na Wikipedii? I v takových případech je ale dobré vědět, že máme možnost zkratky, byť se rozhodneme ji nevyužít.

Zkratka je do jisté míry odrazem našeho vztahu k času. Čím chceme strávit vymezený čas? Někdy je důležité zažít něco v čase a nemá příliš cenu hledat zkratku, která by nás o takový zážitek ošidila. Poslech hudební skladby nemá smysl krátit. V jiných případech je však život příliš krátký na to, abychom úsilí dostat se tam, kam chceme, věnovali delší dobu, než je nutné. Film dokáže zhustit život do devadesáti minut. Divák nechce sledovat každý úkon, který hlavní postava udělá. Letíme-li na druhý konec světa, je to zkratka za pomalejší druhy přepravy, a naše dovolená v cílové destinaci bude díky tomu delší. Kdyby bylo možné let ještě víc zkrátit, většina z nás by toho využila. Jsou ale situace, kdy lidé chtějí zažít pomalou verzi přesunu do cíle. Poutě na svatá místa se zkratek štítí. Filmové upoutávky nesleduji, protože film na můj vkus zkracují až příliš. Je nicméně dobré mít na výběr.

V literatuře vedou zkratky obvykle k pohromě. Červená Karkulka by nenarazila na vlka, kdyby při hledání zkratky lesem nesešla z cesty. V románu *Poutníkova cesta* od Johna Bunyana se ti, kdo si ulehčují cestu kolem hory zvané Překážka, ztratí a zahynou. V *Pánovi prstenů* hobit Pipin ostatní členy výpravy upozorňuje, že „zkratkou si jenom zajdeš“, a bojí se, že nebudou mít dost času posedět ve vyhlášené hospodě na cestě, na což mu Frodo odpoví, „zkratkou si zajdeš, ale v hospodě se zasedíš“. Homer Simpson po katastrofální zajížďce na cestě do Drsnolandu nadává: „Slovo zkratka je propříště tabu.“ Nebezpečí zkratek je dobře shrnuto ve filmu *Ztřeštěná jízda*: „Jasně, že je to obtížné, je to přece zkratka. Kdyby to bylo snadné, byla by to jen ‚cesta‘.“ Záměrem této knihy je osvobodit myšlenku zkratky od těchto literárních konotací. Zkratka není dálnice do pekla, ale cesta ke svobodě.

ČLOVĚK PROTI STROJI

Jedním z podnětů, které mě přiměly k sepsání oslavy umění zkratky, je sílící představa, že lidská rasa bude nahrazena novým druhem, který se nebude muset obtěžovat hledáním zkratek.

Žijeme v době, kdy počítače zvládnou za jedno odpoledne víc výpočtů, než kolik bych jich já sám stačil udělat za celý život. Počítače dovedou analyzovat celou světovou literaturu za dobu, za kterou přečtu jeden román. Umí rozebrat velký počet variací šachové partie, zatímco já jsem schopen přemýšlet jen na pár tahů dopředu. Počítače svedou prozkoumat sítě cest pokrývajících Zemi rychleji, než mně trvá zajít na nákup do obchodu na rohu.

Přišel by dnes počítač s Gaussovou zkratkou? Proč by se s tím namáhal, když umí sečíst čísla od 1 do 100 za zlomek okamžiku?

Jaká je naděje, že lidský rod udrží krok s mimořádnou rychlostí a takřka bezmeznou paměťovou kapacitou našich křemíkových souputníků? Počítač ve filmu *Ona* z roku 2013 se svému lidskému majiteli svěřuje, že s lidmi je interakce tak pomalá, že raději tráví čas s jinými operačními systémy, které se mu co do rychlosti myšlení vyrovnají. Na lidi pohlíží podobně, jako my vidíme třeba horu, která velmi dlouho vzniká a pak pomalu eroduje.

Možná tu je ale něco, co dává lidem proti strojům výhodu. To, že náš mozek nedokáže provádět miliony výpočtů za sekundu, i všechny fyzické nedokonalosti našich těl ve srovnání se silou, kterou dokážou vyvinout mechaničtí roboti, nás nutí k zamyšlení, zda neexistuje cesta, jak bychom se mohli vyhnout všemu tomu, co je pro počítače a roboty něčím zcela běžným.

Když se lidé ocitnou před zdánlivě nedobytnou horou, začnou hledat zkratky a okliky. Než se pokoušet přejít přes vrchol, nedala by se najít šikovná cesta okolo? A taková zkratka pak často vede ke skutečně inovativním způsobům řešení problémů. Tam, kde se počítač plouží vytyčenou cestou a napíná své digitální svaly, člověk proklouzne do cíle díky odhalení šikovné zkratky, která se všem těžko prostupným překážkám důmyslně vyhne.

Lenoši mezi námi by teď měli zbystřit. Mám za to, že právě v lenosti spočívá naše zásadní výhoda proti náporu strojů. Lidská lenost je skutečně významným faktorem v nacházení nových a výhodných způsobů dosahování cílů. Když na něčem pracuji, často si pomyslím: začíná to být příliš komplikované – poodstoupil bych a vymyslel nějakou zkratku. Víme, co by na to řekl počítač: „Já na to ale mám nástroje, takže mi stačí jenom do toho dál bušit a pronikat stále hlouběji." Jelikož se ale neunaví a ani nebude nikdy líný, možná mu uniknou věci, na něž my přijdeme právě díky své lenosti. Protože nemáme schopnosti proniknout do věcí silou, musíme hledat chytré způsoby, jak na to.

Známe řadu příběhů o tom, jak inovace a pokrok vzešly z lenosti a snahy vyhnout se dřině. Vědecké objevy nezřídka vznikly v mozku, který právě zahálel. Traduje se, že německý chemik Friedrich August Kekulé přišel na kruhovou strukturu benzenové molekuly, když usnul a ve snu se mu zjevil had požírající vlastní ocas. Velký indický matematik Šrínivása Rámanudžan často mluvil o tom, jak mu hinduistická bohyně Namagiri psala v jeho snech složité rovnice.

„Zbystřil jsem pozornost. Ta ruka psala řadu eliptických integrálů. Uvízly mi v paměti. Jakmile jsem se vzbudil, pustil jsem se do jejich zapisování,“ popsal Rámanudžan svůj zážitek. Nový objev často napadl někoho, kdo se v té chvíli nemusel zatěžovat úmornou prací. Šéf společnosti General Electric Jack Welch měl každý den vyhrazenu hodinu, které říkal „čas na koukání z okna“.

Lenost neznamená, že nic neděláme. To si zaslouží zvláštní zdůraznění. Hledání zkratek často provází těžká dřina. Je to tak trochu paradox. Motivace k nalezení zkratky sice může vycházet z touhy vyhnout se práci, zvláštní však je, že to nezřídka ústí do období intenzivního hlubokého myšlení, které nejenže odstraňuje nudnou dřinu, ale ukončuje i nudu, která je spojena se zahálkou. Mezi zahálkou a nudou je jen tenká mez a to bývá často katalyzátorem k honbě za zkratkou, jejíž nalezení je spojeno s nemalým množstvím práce. Jak napsal Oscar Wilde, „nedělat vůbec nic je ta nejtěžší věc na světě, nejtěžší a nejintelektuálnější“.

Nedělat nic bývá často předstupněm velkého rozvoje myšlení. Studie nazvaná „Rest Is Not Idleness“ (Odpočinek není nečinnost), kterou v roce 2012 publikoval časopis *Perspectives on Psychological Science*, ukázala, jaký význam má pro naše poznávací schopnosti předem nastavený režim našich neurálních pochodů. Tento modus je obvykle potlačen v situacích, kdy je naše pozornost příliš zaměřena na vnější svět. Nedávný nástup trendu *mindfulness* prosazuje cestu k osvícení v podobě zklidnění mysli proti náporu vtíravých myšlenek. Často se to projevuje tím, že se před prací dává přednost hře. Hra – spíše než nudná mechanická práce – totiž může pěstovat tvořivost a rodit nové nápady. Je to jeden z důvodů, proč v kancelářích internetových startupů a učebnách matematických fakult najdeme kulečníkové stoly a deskové hry už stejně běžně jako stoly s počítači.

Odmítavý postoj společnosti k lenosti je možná prostředkem k ovládnutí a omezení vlivu těch, kdo se nechtějí přizpůsobit. Skutečný důvod, proč se na líného člověka hledí s podezřením, je to, že je to někdo, kdo není ochoten hrát podle pravidel. Gaussův učitel považoval zkratku, kterou jeho žák vymyslel, aby se vyhnul úmorné práci, za útok na svou autoritu.

Zahálčivost ale nebyla odmítána vždy. Velmi výřečně se v její prospěch vyslovil anglický spisovatel Samuel Johnson: „Kdo zahálí, ten se nejenže vyhýbá činnostem, které bývají často neplodné, ale někdy se mu vede lépe než těm, kdo pohrdají vším, co mají na dosah.“ Agatha Christie ve své autobiografii připouští: „Nové objevy se podle mého názoru rodí ze zahálky, možná také z lenosti. Aby si člověk ušetřil námahu.“ Fenomenální hráč baseballu Babe Ruth, jeden z největších mistrů homerunu v dějinách, byl prý motivován k odpalům míčků mimo hřiště tím, že nenáviděl běhání mezi metami.

KDY DÁT PŘEDNOST PRÁCI

Rozhodně nechci tvrdit, že veškerá práce je něčím špatným. Pro mnoho lidí představuje jejich práce něco velmi hodnotného. Definuje jejich identitu. Dává jim smysl života. Důležitá je ale povaha práce. V práci úmorné a bezduché bychom obvykle životní naplnění nehledali. Aristoteles rozlišoval mezi dvěma druhy práce: *praxis* jako činností vykonávanou pro ni samu, a *poiésis*, konáním zaměřeným na tvorbu něčeho užitečného. Nemá příliš smysl vymýšlet zkratku, pokud děláme něco pro potěšení, u druhého typu práce však budeme zkratky vyhledávat rádi. Většina práce zřejmě spadá do kategorie *poiésis*. Ideálem však bezpochyby je usilovat o práci prvního typu. A právě zde nám má pomoci zkratka. Té nejde o zrušení práce, ale má nás navést na cestu k práci, která bude pro nás smysluplná.

Cílem nedávno vzniklého politického hnutí za „komunismus plně automatizovaného luxusu“ je zajistit, aby se lidé díky pokroku v umělé inteligenci a robotice zbavili nekvalifikované práce, kterou by vykonávaly stroje, a my bychom se mohli oddávat jen té práci, která nás naplňuje. Práce se stane luxusním statkem. Vytváření důmyslných zkratek by mělo být součástí seznamu technologií, které nás nasměrují k budoucnosti, v níž bude práce vykonávána pro radost z ní samé, nikoli jako prostředek k nějakému cíli. Takový měl být konečný cíl komunismu už pro Karla Marxe: odstranit rozdíl mezi zábavou a prací. „Ve vyšší fázi komunistické společnosti,“ psal Marx, „práce nebude pouhým prostředkem k životu, nýbrž stane se sama první životní potřebou.“ Zkratky, které jsme vytvořili, by nás měly vyvést z toho, co Marx nazýval „říší nutnosti“, a dovést nás do „říše svobody“.

Existuje ale na světě místo, kde bychom se obešli bez tvrdé práce? Jak by se mohl lenivý člověk naučit hrát na hudební nástroj? Napsat román? Vystoupat na Mount Everest? I zde si ukážeme, že kombinace hodin strávených u stolu nebo cvičením spolu s vhodnou zkratkou může zajistit, že čas, který danému úkolu budeme věnovat, využijeme maximálně účelně. Svou knihu prokládám rozhovory s lidmi, kteří se v dané oblasti vyznají, abych zjistil, zda je v jejich profesích možné využít zkratek nebo zda se lze nějak vyhnout oněm 10 000 hodinám praxe, které jsou podle Malcolma Gladwella potřebné k tomu, aby se člověk dostal na špičku svého oboru.

Zajímalo mě, zda odborníci v jiných profesích používají nějaké zkratky obdobné těm, které jsem se naučil využívat ve svém vlastním oboru, tedy v matematice, nebo jestli náhodou neexistují nějaké nové druhy zkratek, o nichž nevím a které by v mé vlastní profesi mohly podnítit nové způsoby uvažování. Fascinují mě ale i takové úkoly, jejichž zvládnutí není možné usnadnit žádnou zkratkou. Čím to, že některé oblasti lidské činnosti vzdorují moci zkratky? Znovu a znovu narážíme na to, že oním limitujícím faktorem je lidské tělo. Změnit nebo vycvičit tělo tak, aby umělo dělat něco nového, velmi často vyžaduje čas a neustálé opakování, jenomže pro urychlení takových fyzických změn žádné zkratky nemáme. Na naší cestě po různých typech zkratek, které matematici během doby objevili, najdeme za každou kapitolou „zastávku“, v níž se podíváme na podobné zkratky v jiných oborech lidské činnosti, popřípadě na důvody, proč právě tam žádné neexistují.

Úspěšné řešení školního úkolu sečíst čísla od 1 do 100 za pomoci šikovné zkratky vzbudilo v Gaussovi touhu rozvíjet své matematické nadání. Jeho učitel Büttner na úkol rozvíjet Gaussův talent nestačil, měl ale pomocníka, sedmnáctiletého Johanna Martina Bartelse, který měl stejnou vášeň pro matematiku jako Gauss. Jeho úkolem bylo sice připravovat pro žáky pera z husích brk a pomáhat ve výuce psaní, Bartelse ale více uspokojovalo probírat matematické texty s mladým Gaussem. Společně se pouštěli do zkoumání zákrut matematiky a užívali si zkratek, které jim k tomu nabízela algebra a matematická analýza.

Bartels si brzy uvědomil, že Gauss potřebuje náročnější prostředí, v němž by mohl tříbit své vlohy. Podařilo se mu zajistit mu audienci u brunšvického vévody, na něhož Gauss zapůsobil natolik, že se vévoda stal jeho patronem, financoval mu vzdělání na místním kolegiu a pak i na univerzitě v Göttingenu. Zde se Gauss začal učit nejvýznamnějším zkratkám, které matematici během staletí vymysleli, a ze studia se mu brzy stal odrazový můstek k jeho vlastním působivým příspěvkům k matematické vědě.

Tato kniha je mým osobním průvodcem po dvou tisíciletích historie neustále vylepšovaného myšlení. Naučit se procházet dovedně vybudovanými tunely nebo skrytými průchody mi zabralo celá desetiletí, ale matematici na nich pracovali tisíce let. Vybírám zde a snažím se osvětlit některé z důmyslných strategií řešení složitých problémů, s nimiž se setkáváme v každodenním životě. Bude to vaše zkratka k umění zkratky.

1. ZKRATKA

VZOREC

V domě máte schodiště s 10 schody. Ty můžete brát po jednom, nebo po dvou. Nahoru se tak dostanete například 10 kroky po jednom schodu nebo 5 kroky po dvou schodech. Můžete použít také kombinaci kroků po jednom a po dvou schodech. Kolik takových možných kombinací existuje? Můžete je spočítat zdlouhavým postupem, v němž budete postupně určovat všechny kombinace. Jak by to ale udělal malý Gauss?

Chcete znát zkratku, jak dosáhnout zvýšení platu o 15 procent za přesně tutéž odvedenou práci? Nebo třeba zkratku, s jejíž pomocí rozmnožíte malou investici na slušnou sumu? Co takhle najít zkratku, díky níž porozumíte možnému vývoji cen akcií v příštích měsících? Máte pocit, že někdy stále jen znovu a znovu objevujete Ameriku, ale cítíte, že existuje něco, co všechny tyto vaše staronové objevy spojuje? Co byste řekli na zkratku, která vám pomůže s vaší chabou pamětí?

Ponořme se nyní do jedné z nejmocnějších zkratek, jakou kdy lidé objevili – totiž do schopnosti nacházet vzorce. Dar lidské mysli postřehnout vzorce v chaosu kolem nás zajistil našemu druhu tu nejúžasnější zkratku ze všech: zkratku k poznání budoucnosti předtím, než se z ní stane přítomnost. Dokážeme-li najít vzorec v datech popisujících minulost a přítomnost a pak tento vzorec prodloužit dál, máme šanci poznat budoucnost. Nemusíme čekat. Schopnost zjišťovat vzorce je v mých očích jádrem matematiky a její nejúčinnější zkratkou.

Vzorce nám umožňují zjistit, že ačkoli konkrétní čísla mohou být různá, pravidlo určující například jejich zvyšování může být společné. Najdeme-li pravidlo, jehož vyjádřením je vzorec, znamená to, že když se setkáme s novou sadou dat, nebudeme muset dělat tutéž práci znovu. Vzorec to udělá za nás.

Ekonomie je plná dat, v nichž lze najít vzorce, a když je správně čteme, může nás to dovést k prosperující budoucnosti. Některé vzorce mohou být ovšem zavádějící, jak ukázala světová finanční krize z roku 2008. Díky vzorcům nacházeným v datech o lidech nakažených virem můžeme porozumět trajektorii pandemie a zasáhnout dříve, než nákaza zabije příliš mnoho osob. Vzorce, které zjišťujeme ve vesmíru, nám umožňují porozumět naší minulosti i budoucnosti. Zkoumání čísel, která ukazují, jakým tempem se od nás vzdalují hvězdy, nám odhalilo vzorec, díky němuž víme, že vesmír začal velkým třeskem a směřuje do chladné budoucnosti zvané tepelná smrt.

A díky své schopnosti vysledovat v astronomických údajích vzorce také ctižádostivý mladý Gauss získal na světové scéně pověst mistra zkratky.

PLANETÁRNÍ VZORCE

Na Nový rok 1801 byla na oběžné dráze kolem Slunce, někde mezi Marsem a Jupiterem, objevena osmá planeta. Dostala jméno Ceres a její objev se na prahu nového století všeobecně považoval za předzvěst velké budoucnosti vědy. Nadšení se však během pár týdnů proměnilo v zoufalství, když tato malá planeta (která je ve skutečnosti jen planetkou čili trpasličí planetou) v blízkosti Slunce zmizela astronomům z očí a ztratila se v nepřehledném hvězdném nebi. Astronomové neměli potuchy, kam se poděla.

Pak ale dorazila zpráva, že se jistý čtyřiadvacetiletý muž z Braunschweigu ozval, že ví, kde ztracenou planetu najít. Sdělil astronomům, kam mají namířit teleskopy. A hle, jako kouzlem se tam objevila Ceres. Oním mladým mužem nebyl nikdo jiný než náš hrdina Carl Friedrich Gauss.

Od svých školních úspěchů z doby, kdy mu bylo devět let, dospěl Gauss k řadě úchvatných matematických průlomů, počínaje vypracováním způsobu, jak sestrojit sedmnáctiúhelník jen pomocí kružítka a pravítka. Byl to problém, který odolával řešení celých dva tisíce let od doby, kdy staří Řekové začali hledat důmyslné cesty k sestrojování geometrických útvarů. Gauss byl na svůj počin tak pyšný, že si začal vést matematický deník, jejž v dalších letech plnil úžasnými objevy o číslech a geometrii. Nyní ho však nejvíce zaujaly údaje o nové planetě. Lze nalézt v hodnotách zaznamenaných před zmizením planetky Ceres za Sluncem nějaká vodítka, která by naznačovala, kde lze toto těleso znovu vystopovat? Nakonec tento oříšek rozlouskl.

Jeho ohromný výkon na poli astronomických předpovědí nebylo samozřejmě žádné kouzlo. Byla to matematika. Astronomové objevili Ceres pouhou náhodou, Gauss naproti tomu za pomoci matematické analýzy odhalil za údaji o polohách planetky vzorec a s jeho pomocí zjistil, jak se těleso bude pohybovat dál. V rozeznání vzorců v dynamických pohybech vesmíru nebyl samozřejmě zdaleka první. Astronomové tuto zkratku používali k pochopení dějů na měnící se noční obloze a k předpovědím jejích budoucích změn od chvíle, kdy náš druh pochopil, že budoucnost a minulost jsou vzájemně propojeny.

Díky vzorcům ve střídání ročních období si zemědělci mohou plánovat setí plodin. Každé roční období je spojeno s určitou konfigurací hvězd. Vzorce v chování zvěře, v její migraci a páření, umožnily pravěkým lidem vypravovat se na lov v nejpříhodnější době, kdy mohli s nejnižším množstvím vydané energie pořídit největší úlovky. Kdo dokázal předpovídat zatmění, stal se jedním z nejvýznamnějších příslušníků kmene. Toho využil i Kryštof Kolumbus, když díky znalosti o brzkém zatmění Měsíce získal páku na domorodce poté, co v roce 1503 jeho bouří poničené lodě přistály na Jamajce. Indiány jeho schopnost předpovědět zmizení Měsíce natolik ohromila, že Kolumbovi vyhověli a zajistili jeho lidem potraviny.

JAKÉ JE DALŠÍ ČÍSLO?

Co obnáší hledání vzorců, to krásně vidíme na příkladech, které možná znáte ze školy – učitel předloží posloupnost čísel a žáci mají určit, které číslo bude další v pořadí. Náš učitel tyto úkoly psal křídou na tabuli a já je měl velmi rád. Čím déle mi hledání vzorce trvalo, tím větší uspokojení z nalezení zkratky jsem pociťoval. To jsem zjistil už hodně brzy. Nejlepší zkratky bývají často ty, jejichž odhalení trvá dlouho. Dají práci. Jakmile jsou ale nalezeny, stávají se součástí našeho repertoáru přístupu ke světu a můžeme je používat znovu a znovu.

Pojďme si aktivovat neurony, jimiž se dobíráme zkratek v podobě vzorců, na několika příkladech. Jaké je další číslo v následující posloupnosti?

$$1, 3, 6, 10, 15, 21\ldots$$

To není nic obtížného. Asi jsme postřehli, že se zde pokaždé přičítá vždy o 1 číslo. Další číslo tedy je 28, protože je to 21 + 7. Těmto číslům se říká trojúhelníková, protože představují počet kamenů, z nichž lze sestavit trojúhelník, přičemž následující větší trojúhelník získáme tak, že k jedné straně přidáme novou řadu, v níž bude vždy o jeden kámen víc. Je ale možné najít zkratku, kterou bychom mohli určit sté číslo této posloupnosti, aniž bychom museli lopotně sčítat předcházejících 99 čísel? Právě tento problém řešil Gauss, když učitel Büttner zadal žákům úkol sečíst čísla od 1 do 100. Gauss našel chytrou zkratku k odpovědi tím, že sečetl čísla v párech. Jestliže Gaussův trik zobecníme, pak n-té trojúhelníkové číslo nalezneme pomocí tohoto vzorce:

$$\tfrac{1}{2} \times n \times (n + 1).$$

Jakmile se Gauss s trojúhelníkovými čísly ve třídě pana Büttnera setkal, už ho nepřestala fascinovat. V jeho matematickém deníku ke dni 10. červenci 1796 dokonce stojí řecké slovo „Eureka!“ a za ním zápis následující formule:

$$\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta.$$

Gauss totiž objevil jednu pozoruhodnou věc: každé číslo lze zapsat jako tři trojúhelníková čísla sečtená dohromady. Například 1796 = 10 + 561 + 1225. Toto zjištění otevírá cestu k velmi účinným zkratkám, protože už není zapotřebí dokázat, že něco platí pro všechna čísla, ale nejspíš by to stačilo dokázat jen pro trojúhelníková čísla a pak využít Gaussova objevu, že každé číslo je součtem tří trojúhelníkových čísel.

Podívejme se na další příklad. Jaké je další číslo v této posloupnosti?

1, 2, 4, 8, 16…

Opět nic složitého. Další v pořadí je 32. Čísla v této posloupnosti se pokaždé zdvojnásobí. Říká se tomu exponenciální růst, řídí se jím spousta věcí, které rostou, a je důležitý pro pochopení dalšího vývoje tohoto vzorce. Uvedená posloupnost vypadá zpočátku docela nevinně. To si nejspíš myslel i jeden indický král, když souhlasil s odměnou požadovanou učencem, který vymyslel šachy. Vynálezce šachů krále požádal, aby mu dal na první políčko šachovnice jedno zrnko rýže a na každé další políčko vždy dvojnásobný počet zrnek. První řada vypadala ještě vcelku umírněně. Stačilo na ni jen 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255 zrníček rýže. Sotva tak na jeden kousek suši.

Když ale královi sluhové museli dávat na další políčka šachovnice rýže stále více, brzy jim došly zásoby. Na zaplnění poloviny políček bylo zapotřebí kolem 280 000 kilogramů rýže. A to byla teprve ta lehčí polovina. Kolik zrnek rýže potřeboval král, aby vynálezci šachů zaplatil podle dohody? Vypadá to jako jeden z těch úkolů, jaké by Herr Büttner mohl zadat svým žákům. Těžká cesta k řešení je nasnadě: sečíst 64 různých čísel. Kdo by se ale s tím chtěl dřít? Jak by se asi s takovým úkolem vyrovnal Gauss?

Pro tento výpočet máme nádhernou zkratku, i když na první pohled vypadá, jako by nám cestu spíše ztěžovala. Zkratky totiž často začínají tak, že zdánlivě míří opačným směrem než tam, kam chceme. Ze všeho nejdříve dáme celkovému počtu zrnek rýže název: *X*. V matematice je to jeden z oblíbených názvů, a jak uvidíme v kapitole 3, je to sama o sobě jedna z nejmocnějších zkratek celého matematického arzenálu.

Začneme tím, že zdvojnásobíme celkový počet, který se snažíme vypočítat:

$$2 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}).$$

Teď to vypadá, jako bychom si to spíše ztížili. Ale vydržme. Vynásobme si to:

$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Nyní přijde na řadu důmyslný trik. Odečteme od toho všeho X. Nejprve se zdá, že jsme se jenom vrátili tam, kde jsme začali:

$$2X - X = X.$$

Jak nám to má pomoci? Jakmile ale $2X$ a X nahradíme součty, které jsme si zapsali, stane se malé kouzlo:

$$2X - X = (2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}).$$

Většina členů se v tomto zápisu výpočtu vyruší! V první závorce zůstane jen 2^{64} a ve druhé 1. Zbude nám tedy

$$X = 2X - X = 2^{64} - 1.$$

Ke zjištění počtu rýžových zrnek, které král musel celkem vyplatit vynálezci šachů, nepotřebujeme tedy žádné dlouhé počítání; stačí nám tento jediný výpočet, jehož výsledkem je

$$18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

To je víc rýže, než se jí na zeměkouli vypěstovalo za celé poslední tisíciletí. Ukazuje nám to, že někdy můžeme těžkou dřinu postavit samu proti sobě a zůstane nám něco, co lze analyzovat mnohem jednodušeji.

Jak král na své vlastní náklady zjistil, zdvojnásobování začíná zdánlivě nevinně, pak ale velmi rychle nabírá na obrátkách. Tak mocná je síla exponenciálního růstu. Pociťují ji například ti, kdo si vezmou neškodně vypadající půjčku. Úvěrová firma nabízí půjčit 1 000 liber při úroku 5 procent měsíčně, což se zdá na první pohled snesitelné. Po jednom měsíci dlužíme jen 1 050 liber. Potíž je v tom, že po každém měsíci se nová suma vždy vynásobí koeficientem 1,05. Po dvou letech tak dlužíme již 3 225 liber. Do pátého roku náš dluh naroste na 18 679 liber. To je skvělé pro toho, kdo půjčuje, dlužník však zapláče.

Skutečnost, že lidé tomuto vzorci exponenciálního růstu obvykle nerozumějí, vede k tomu, že se z něj může stát zkratka k bídě. Firmy, které nabízejí krátkodobé půjčky k překlenutí doby do výplaty, úspěšně využívají neschopnost spočítat si tento vzorec do delší budoucnosti k tomu, aby klientům vnutily smlouvy, které zpočátku vyhlížejí přitažlivě. Abychom neskončili bezmocní a bez možnosti vrátit se do bezpečí, měli bychom nebezpečí zdvojnásobování a exponenciálního růstu znát.

Děsivou rychlost exponenciálního růstu jsme na vlastní kůži a až příliš pozdě poznali během koronavirové pandemie roku 2020. Počet nakažených lidí se zdvojnásoboval v průměru každé tři dny. To pak vedlo k zahlcení zdravotnických systémů.

Důsledky exponenciálního růstu na druhé straně nabízejí matematické zdůvodnění toho, že na Zemi (pravděpodobně) nejsou žádní upíři. Upír potřebuje ke svému přežití alespoň jednou do měsíce lidskou krev. Problémem je, že jakmile si na ní pochutná, z jeho oběti se stane také upír. O měsíc později by tak muselo být na světě dvakrát tolik upírů, kteří by všichni vyhledávali další lidskou krev.

Na světě bylo k roku 2020 odhadem 7,7 miliardy lidí. Počet upírů se každý měsíc zdvojnásobí – to ale bude mít tak ničivý dopad, že za necelých 33 měsíců jediný upír přemění veškeré lidstvo na svoje příbuzné.

Jen tak pro případ, že byste narazili na upíra, nabízím ze svého matematického arzenálu užitečný trik, jak krvežíznivé monstrum odehnat. Kromě tradičních způsobů obrany, jako je česnek, zrcadla a kříže, je jedním z méně obvyklých roztrousit kolem jeho rakve semínka máku. Upíři totiž trpí duševní poruchou zvanou aritmománie, což je nutkavá touha počítat věci kolem sebe. Než Drákula spočítá, kolik zrnek máku je kolem jeho útulku rozeseto, slunce ho zažene zpět do rakve.

Aritmománie je závažné duševní onemocnění. Trpěl jím například vynálezce Nikola Tesla, jehož výzkumy elektřiny nám daly střídavý proud. Tesla byl posedlý čísly dělitelnými třemi: musel mít 18 čistých ručníků denně a kroky si počítal tak, aby se jejich počet dal dělit třemi beze zbytku. Možná nejznámějším fiktivním nositelem aritmománie je hrabě Počtář z televizního cyklu *Sezame, otevři se*: loutka upíra, která generacím malých diváků pomáhala s jejich prvními matematickými krůčky.

MĚSTSKÉ VZORCE

Podívejme se nyní na poněkud obtížnější číselnou posloupnost. Dokážeme i v ní odhalit vzorec, na němž je založena?

179, 430, 1 033, 2 478, 5 949...

K vyřešení stačí každé číslo vydělit číslem, které mu předchází, což nám ukáže, že koeficient, na jehož základě vznikají další členy posloupnosti, je číslo 2,4. Jde pořád o exponenciální růst, zajímavé ale je, co tato čísla představují ve skutečnosti.

Jsou to počty patentů udělených ve městech s postupně 250 000, 500 000, 1 milionem, 2 miliony a 4 miliony obyvateli. Ukazuje se totiž, že zvětšení populace města na 200 % přidává na jeho kreativitě dalších 40 %! Podobný vzorec růstu přitom není charakteristický pouze pro patenty.

Navzdory obrovským kulturním rozdílům mezi takovými městy, jako je Rio de Janeiro, Londýn a Kanton, existuje matematický vzorec, který všechny tyto obří městské aglomerace od Brazílie po Čínu spojuje. Jsme zvyklí charakterizovat velká města jejich geografií a historií, což jsou rysy, které individualitu míst, jako je New York nebo Tokio, zdůrazňují. To jsou však pouhé detaily, zajímavé vyprávění, které toho ale příliš nevysvětluje. Když se totiž na město podíváme matematickýma očima, začne se nám vynořovat jeden univerzální rys, který překračuje politické a geografické hranice. Tento matematický pohled odhaluje přitažlivost měst… a ukazuje, že čím větší, tím lepší.

Pomocí matematiky zjistíme, že růst každého zdroje, který město má, lze vyjádřit jediným kouzelným číslem, specifickým pro každý z těchto faktorů. Zdvojnásobení městské populace vede k tomu, že velikost sociálních a ekonomických charakteristik města se zvětší o něco více než na dvojnásobek. Pozoruhodné je, že u mnoha zdrojů tento přírůstek odpovídá zhruba 15 procentům. Srovnáme-li například města s jedním milionem a dvěma miliony obyvatel, zjistíme, že větší město má ještě o 15 procent víc než jen dvojnásobné množství restaurací, koncertních hal nebo knihoven.

Zhruba stejný vliv má velikost města i na mzdy a platy. Podívejme se na dva zaměstnance, kteří vykonávají přesně tutéž práci, avšak v různě velikých městech: plat pracovníka ve městě se dvěma miliony obyvateli bude o 15 procent vyšší než odměna zaměstnance s toutéž prací ve městě s milionem lidí. Když se velikost města znovu zdvojnásobí na 4 miliony obyvatel, plat takového zaměstnance bude o dalších 15 procent vyšší. Čím je město větší, tím v něm za tutéž práci dostaneme zaplaceno více.

Zpozorování takového vzorce může být pro podnikatele klíčem k tomu, aby z vložených peněz dostali co nejvíc. Města vypadají různě a jsou různě veliká. Firma, která pochopí, že na vnější podobě nezáleží, ale na velikosti ano, bude schopna vydělat podstatně víc jen tím, že se přesune do většího města.

Toto zvláštní, všeobecně platné škálování neobjevil ekonom ani sociolog, nýbrž teoretický fyzik, který na města aplikoval tutéž matematickou analýzu, jaká se obvykle používá při zkoumání základních zákonů ve fungování vesmíru. Brit Geoffrey West po studiu fyziky v Cambridgi odešel na Stanford, kde zkoumal vlastnosti základních částic. K objevu důsledků velikosti měst ho však podnítil až jeho nástup do čela Santa Fe Institute, ústavu, který hledá cesty, jak spojit k diskusím a společným projektům lidi z různých oborů. Velmi často se stává, že zkratka k vysvětlení záhad v jedné oblasti výzkumu vede oklikou přes zdánlivě nesouvisející území zcela jiného oboru.

A právě směs matematiky, fyziky a biologie, která na Santa Fe rozkvétala, dovedla Westa k myšlence, zda města v celém světě nemají nějaké univerzální charakteristiky, podobně jako mají své univerzální vlastnosti elektrony a fotony světla bez ohledu na to, kde se ve vesmíru nacházejí.

O matematice můžeme opodstatněně tvrdit, že tvoří jádro základních zákonů vesmíru a že dokáže vysvětlit gravitaci nebo elektřinu. Město naproti tomu tvoří zdánlivě neuchopitelná masa lidí s jejich vlastními motivacemi a touhami, lidí, kteří vedou vlastní životy. Když se ale snažíme porozumět světu kolem sebe, zjistíme, že matematika je kód, který řídí nejen náš okolní svět a všechno v něm, ale i nás samotné. Existuje dokonce vzorec pro síly, které ovládají napohled chaotické chování milionů jednotlivců.

West s týmem spolupracovníků shromáždil data z tisíců měst po celém světě. Sesbírali všechno od celkové délky elektrického vedení ve Frankfurtu po počet vysokoškolských absolventů v Boise, metropoli amerického státu Idaho. Zaznamenávali statistiky o čerpacích stanicích, osobních příjmech, chřipkových nákazách, sebevraždách, kavárnách, dokonce i o rychlosti chůze chodců. Na internetu ovšem nebylo všechno. West se například musel potýkat s čínštinou, aby rozluštil rozsáhlé soubory dat z měst po celé Číně. Když se výzkumníci pustili do analýzy všech těchto čísel, začal se před nimi vynořovat skrytý vzorec. Město, které má dvojnásobný počet obyvatel, bez ohledu na geografické umístění, vykazuje dodatečný přírůstek sociálních a ekonomických charakteristik o kouzelnou konstantu 15 procent.

Ve městech dnes žije přes 50 procent světové populace. Exponenciální přírůstek, který West při zvyšování populace měst odhalil, by mohl vysvětlovat, proč jsou města pro lidi tak přitažlivá. Jakmile se na jednom místě soustředí lidé, vzniká tím víc než pouhý součet částí. Také proto se zřejmě lidé do velkých měst přesunují. Jestliže se totiž přestěhujeme do dvakrát většího města, najednou každý máme všeho o 15 procent víc.

Toto škálování má vliv na infrastrukturu měst, ovšem v opačném směru. Dvojnásobně lidnaté město jí nebude potřebovat dvakrát tolik, ale naopak na ní ušetří. Náklady na měděné dráty, asfalt nebo kanalizační potrubí zde budou v přepočtu na osobu o 15 procent nižší. Na rozdíl od všeobecně rozšířeného názoru bude naše osobní uhlíková stopa tím nižší, čím větší bude město, v němž žijeme.

Výsledky škálování tímto koeficientem však nejsou vždy jen pozitivní. Tentýž přírůstek při zdvojnásobení velikosti města vykazuje i zločinnost, nemoci a doprava. Jestliže známe kupříkladu počet případů AIDS ve městě s pěti miliony obyvateli, pak k odhadu počtu případů v desetimilionovém městě budeme muset k prostému dvojnásobku přidat rovněž 15 procent navíc. I zde se nám objevuje magické číslo 15 %.

Má toto všeobecné škálování pro města nějaké vysvětlení? Existuje zde něco jako Newtonův gravitační zákon, který platí pro všechno od jablek přes planety až po černé díry?

Klíčem k porozumění, proč určujícím faktorem pro město nejsou jeho fyzické rozměry, ale počet jeho obyvatel, je fakt, že město netvoří budovy a silnice, ale lidé, kteří v něm žijí. Město je jeviště, na němž skuteční lidé sehrávají svůj příběh o civilizaci. Hodnota měst spočívá v tom, že fungují jako síť, která usnadňuje interakce mezi lidmi.

Znamená to, že adekvátní model města se nebude starat o to, zda se rozkládá na ostrově, v údolí nebo je kolem něj poušť, ale pojme jej jako síť interakcí mezi jeho obyvateli. Zdá se, že právě kvalita této sítě městských interakcí má onu vlastnost univerzálního škálování, kterou West objevil. Projevila se zde moc matematiky, její schopnost spatřit jednoduché struktury, které tvoří jádro našeho složitého prostředí.

Budeme-li uvažovat mezní případ, kdy v rostoucím městě je každý v kontaktu s každým, uvidíme, proč bude velké město vykazovat větší než lineární růst. Jestliže v něm žije N obyvatel, kolik může těchto N lidí absolvovat různých podání rukou? Toto číslo nám může sloužit jako horní hranice propojenosti obyvatel. Seřaďme si podání ruky od 1 do N. Občan číslo 1 si podá ruku se všemi ostatními, což činí $N - 1$ podání. Nyní totéž udělá občan číslo 2. Ten již podal ruku občanu 1, takže bude absolvovat $N - 2$ podání. Postupně bude každý další podávat ruku vždy počtu o jednoho člověka méně. Celkový počet potřesení tak je součtem čísel od 1 do $N - 1$. A jsme znovu u toho! To je přece úkol, který dostala Gaussova třída. Gauss objevil pro tento výpočet zkratku:

$$\tfrac{1}{2} \times (N - 1) \times N.$$

Co se stane s tímto měřítkem propojenosti, jestliže zdvojnásobíme N? Počet podání rukou se pouze nezdvojnásobí, ale zvýší se násobkem 2 na druhou, tedy čtyřnásobně. Počet potřesení rukou bude narůstat druhou mocninou tempa růstu populace.

Máme zde nádherný příklad toho, jak nás matematika dokáže zbavit nutnosti znovu objevovat Ameriku. Ačkoli jsme si kladli zcela jinou otázku – ohledně propojenosti v rámci sítě –, zjistili jsme, že v analýze trojúhelníkových čísel již máme k dispozici nástroj, s jehož pomocí víme, jak tato čísla narůstají. Postavy se mohou neustále měnit, scénář však zůstává stejný. Rozumíme-li scénáři, pak máme zkratku k pochopení chování jakékoli postavy, která do dramatu vstoupí. V tomto případě počet propojení mezi občany města narůstá kvadratickým tempem vůči tempu růstu městské populace.

Samozřejmě není možné, aby ve velkém městě znal každý každého. Opatrnější předpoklad by počítal s tím, že lidé se navzájem znají jen ve své čtvrti. Zde však bude škálování jen lineární a celková velikost města na něj vliv mít nebude.

Pravděpodobné je, že míra propojenosti mezi obyvateli města se pohybuje někde mezi těmito dvěma krajnostmi. Občané se znají místně a navíc mají v rámci města celou řadu vzdálenějších kontaktů. A podle všeho právě tato vzdálená propojení jsou tím, co způsobuje onen dodatečný přírůstek propojenosti, který při zdvojnásobení populace činí 15 procent. Jak si později ukážeme, takovýto typ sítě vzniká v rámci různých situací a osvědčuje se jako velmi efektivní prostředí pro vytváření zkratek.

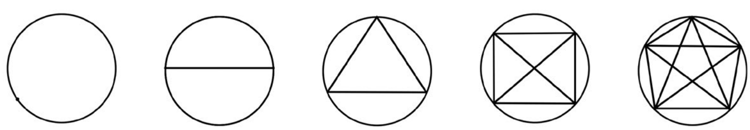
ZAVÁDĚJÍCÍ VZORCE

Vzorce sice mohou být neuvěřitelně účinné, při jejich používání bychom nicméně měli zůstat obezřetní. Chystáme se vydat stezkou, o níž se domníváme, že víme, kam nás dovede. Někdy se však taková pěšina může vychýlit divným a nečekaným směrem. Podívejme se znovu na číselnou posloupnost, s níž jsme se už setkali:

1, 2, 4, 8, 16...

Co kdyby vám někdo řekl, že dalším členem posloupnosti není 32, ale 31?

Nakreslíme-li si kruh a budeme na jeho obvodu rozmísťovat body a vzájemně je spojovat úsečkami, jaký bude maximální počet dílů, na něž bude možné kruh rozdělit? Bude-li na obvodu kruhu jeden bod, pak jej s jiným spojit nemůžeme a zůstane nám jeden díl. Když jeden bod přidáme, můžeme už oba vzájemně spojit, čímž vzniknou dvě části rozdělené narýsovanou spojnicí. Nyní přidáme třetí bod. Když narýsujeme všechny jejich spojnice, vznikne trojúhelník, který budou uvnitř kruhu obklopovat tři oblasti: kruh tak bude rozdělen na celkem čtyři díly.

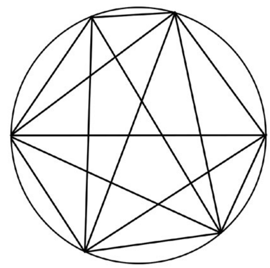


Obr. 1: Prvních pět rozdělení kruhu.

Budeme-li to dělat dál, vynoří se vzorec. Počet dílů kruhu vznikajících přidáním dalšího bodu na obvodu kruhu tvoří následující posloupnost:

1, 2, 4, 8, 16...

V této chvíli lze odůvodněně odhadovat, že když přidáme další bod, počet dílů se zdvojnásobí. Potíž je v tom, že jakmile umístíme na obvod kruhu šestý bod, tento vzorec padne. Ať to zkoušíme jakkoli, maximální počet dílů vymezených spojnicemi šesti bodů bude 31. Nikoli 32!



Obr. 2: Šesté rozdělení kruhu.

Existuje vzorec, jímž lze počet vzniklých dílů vypočítat, je však o něco složitější než prosté násobení dvěma. Je-li na obvodu kruhu N bodů, pak maximální počet dílů, které spojením těchto bodů dostaneme, činí

$$\tfrac{1}{24}\,(N^4 - 6N^3 + 23N^2 - 18N + 24).$$

Upozorňuje nás to na to, že není možné se opírat pouze o čísla sama o sobě, ale musíme vědět, co daná data popisují. Datová věda může být nebezpečná, pokud se nezakládá na hlubokém porozumění oblasti, z níž data pocházejí.

Ukažme si jiné varování před zbrklým použitím zkratky. Jaké je další číslo v následující posloupnosti?

2, 8, 16, 24, 32...

Na první pohled vidíme několik mocnin čísla 2, poněkud narušených číslem 24. Kdo odhadl, že dalším číslem této posloupnosti je 47, tomu bych doporučil vsadit co nejdříve do loterie. Jsou to totiž čísla, která byla 26. září 2007 tažena v britské národní loterii. Už jsme si tak navykli na vyhledávání vzorců, že je často vidíme i tam, kde nic takového být nemůže. Vylosovaná čísla jsou náhodná. Nejsou založena na žádném vzorci, na žádných tajných formulích. Neexistuje žádná zkratka, s jejíž pomocí by se z nás tímto způsobem mohli stát milionáři. V kapitole 8 si nicméně ukážeme, že i v náhodných jevech lze vysledovat vzorce, které pak můžeme využít jako potenciální zkratky. K takovým zkratkám se ale dostaneme jen tak, že poodstoupíme a zaujmeme dlouhodobější pohled.

Koncept vzorce lze použít jako zkratku k pochopení, zda věci jsou, či nejsou náhodné. Souvisí to s tím, jak je daná posloupnost čísel zapamatovatelná.

ZKRATKA K DOBRÉ PAMĚTI

Internet chrlí každou sekundu obrovská množství dat a firmy hledají cesty, jak je co nejdůmyslněji ukládat. Základním způsobem, jak komprimovat informace, aby k jejich uložení nebylo zapotřebí tolik místa, je vyhledávání vzorců. Na tom jsou založeny technologie komprese jako JPEG nebo MP3.

Vezměme si například fotografii, kterou tvoří jen černé a bílé pixely. Na každé takové fotografii mohou být rozsáhlá místa zaplněna pouze bílými pixely. Místo nahrání každého takového pixelu jako bílého je možné použít zkratku. Lze nahrát jen data vymezující hranici souvislé oblasti bílých pixelů a přidat informaci, že jsou bílé. Ta část kódu, která bude vybarvení zajišťovat, bude obvykle mnohem menší než nahrávání každého jednotlivého pixelu v této oblasti jako bílého.

Jakékoli podobné vzorce v pixelech je možné využít k napsání kódu, který při ukládání fotografie spotřebuje mnohem méně paměti, než když se budou ukládat data pixel po pixelu. Vezměme si například šachovnici. Její obrázek má zcela zřejmý vzorec, což umožní napsat kód s jednoduchou instrukcí – 32krát opakovat černý a bílý čtverec v daném rozměru. Velikost kódu přitom zůstane stejná, i kdyby byla šachovnice sebevětší.

Domnívám, se, že vzorce jsou i klíčem k tomu, jak si data ukládají lidé. Musím se přiznat, že mám velmi špatnou paměť. Myslím, že to bylo jedním z důvodů, proč mě tak zaujala matematika, která se mi stala zbraní proti mé chabé paměti na jména, čísla a náhodné informace, v nichž nevidím žádné logické spojitosti. V dějepise jsem například nikdy nevěděl, kdy zemřela královna Alžběta I., a kdybyste mi řekli, že to bylo v roce 1603, za deset minut to zas zapomenu; ve francouzštině jsem měl vždy potíže vybavit si všechny tvary nepravidelného slovesa *aller*; v chemii jsem si nikdy nezapamatoval, zda nafialověle hoří draslík, nebo sodík. V matematice si však díky vzorcům a logice dovedu všechno odvodit. Vyhledávání vzorců nahradilo potřebu mít dobrou paměť.

Mám ale tušení, že to je i jeden ze způsobů, jak si ukládají informace a vzpomínky všichni lidé. Naše paměť je závislá na schopnosti mozku identifikovat v informaci vzorec a strukturu, s jejichž pomocí bude schopen uchovat zhuštěný program, z nějž v případě potřeby vyvolá danou vzpomínku. Zkusme si

Vážení čtenáři, právě jste dočetli ukázku z knihy Umění zkratky**.**
Pokud se Vám ukázka líbila, na našem webu si můžete zakoupit celou knihu.