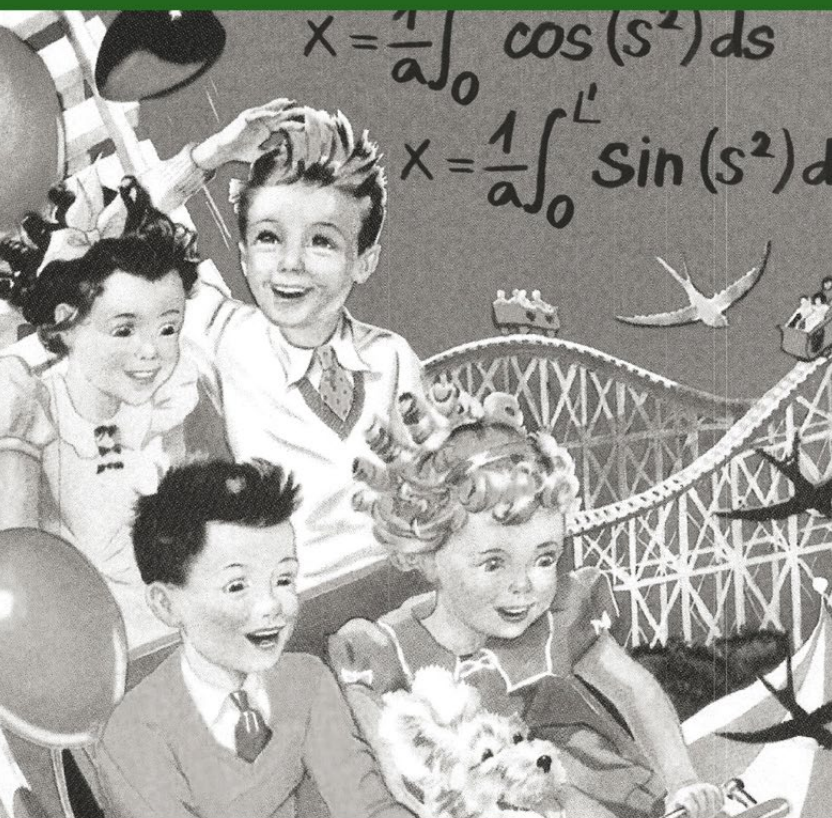


# Kalkulus a jeho dobrodružství

Matematika pro odvážné

David Acheson



DOKOŘÁN



# Kalkulus

## a jeho dobrodružství

Matematika pro odvážné

David Acheson

DOKOŘÁN

David Acheson

## Kalkulus a jeho dobrodružství

Matematika pro odvážné

*The Calculus Story: A Mathematical Adventure* was originally published in English in 2017. This translation is published by arrangement with Oxford University Press. Dokořán s. r. o. is solely responsible for this translation from the original work and Oxford University Press shall have no liability for any errors, omissions or inaccuracies or ambiguities in such translation or for any losses caused by reliance thereon.

*Kalkulus a jeho dobrodružství: Matematika pro odvážné* byla původně vydána v angličtině v roce 2017. Tento překlad vychází po dohodě s nakladatelstvím Oxford University Press. Za chyby, vynechávky, nepřesnosti či nejednoznačnosti překladu plně a výhradně odpovídá nakladatelství Dokořán, s. r. o.

© David Acheson, 2017

Translation © Luboš Pick, 2024

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této publikace nesmí být rozmnožována a rozšiřována jakýmkoli způsobem bez předchozího písemného svolení nakladatele.

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).

Z anglického originálu *The Calculus Story*:

*A Mathematical Adventure* přeložil Luboš Pick.

Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.

Redakce Marie Černá.

Sazba Jiří Rákosník. Konverze do elektronické verze a obálka Michal Puhač.

Vydalo v roce 2025 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,

Holečkova 9, Praha 5,

dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,

jako svou 1 340. publikaci (470. elektronická).

**ISBN 978-80-7675-250-4**

## OBSAH

1	Úvod	7
2	Duch matematiky	12
3	Nekonečno	17
4	Jak strmá je ta křivka?	26
5	Derivování	31
6	Největší a nejmenší	38
7	Hrátky s nekonečnem	44
8	Obsah a objem	51
9	Nekonečné řady	60
10	Příliš mnoho rozkoší	66
11	Dynamika	70
12	Newton a pohyby planet	76
13	Leibnizův článek z roku 1684	84
14	Rébus	93
15	Kdo vynalezl kalkulus?	99
16	Dokola kolem kruhů	106
17	Číslo $\pi$ a lichá čísla	110
18	Kalkulus pod palbou	118
19	Diferenciální rovnice	124
20	Kalkulus a elektrická kytara	131
21	Nejlepší ze všech možných světů?	138
22	Záhadné číslo e	145
23	Jak vyrobit řadu	150
24	Kalkulus s imaginárními čísly	155
25	Nekonečno vrací úder	160

26	Co to vlastně ta limita je?	168
27	Rovnice přírody	173
28	Od kalkulu k chaosu	180
	<i>Doporučená literatura</i>	187
	<i>Práva k ilustracím</i>	188
	<i>Rejstřík</i>	189

# 1

## ÚVOD

V létě 1666 spatřil Isaac Newton na své zahradě padající jablko a okamžitě tuto zkušenost přetavil na objev kalkulu a teorie gravitace.

Tak alespoň praví legenda.

Jakkoli tato historka až příliš zjednodušuje skutečnost, je nepochybně dobrým kandidátem na nejlepší způsob, jak započít vyprávění o kalkulu.

Jablko totiž při pádu *zrychluje*.

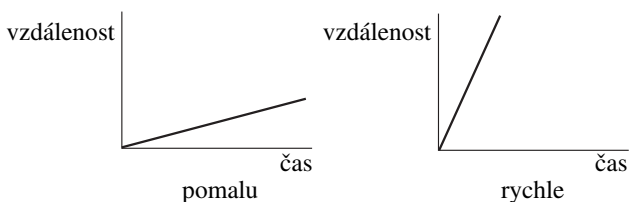


**Obr. 1:** Newton a jablko.

Položme si zásadní otázku. Co vlastně míníme okamžitou rychlostí jablka v daném čase? Známy vzoreček

$$\text{rychlost} = \frac{\text{vzdálenost}}{\text{čas}}$$

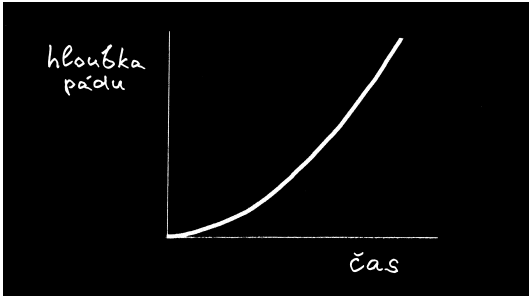
totiž platí pouze v případě, kdy je rychlost pohybu konstantní, tedy kdy je vzdálenost přímo úměrná času. Jinak řečeno, vzoreček funguje jedině za předpokladu, že graf závislosti ураžené vzdálenosti na uběhlém čase má tvar rovné čáry. Rychlost je pak reprezentována sklonem, nebo řečně strmostí této čáry, jak vidíme na obrázku 2.



**Obr. 2:** Pohyb konstantní rychlostí.

Jenomže padající jablko přímou úměrou mezi vzdáleností a časem nedodrží. Jak odhalil Galileo, vzdálenost je v tomto případě přímo úměrná druhé mocnině času, tedy  $t^2$ .

Padající plod se za nějaký čas propadne o určitý úsek. Avšak necháme-li uběhnout dvojnásobek tohoto času, nalezneme jablko dokonce o čtyřnásobek zmíněného úseku níže, protože  $2^2 = 4$ . Znázorníme-li si závislost vzdálenosti na čase, dostaneme křivku na obrázku 3, která se ohýbá směrem nahoru.

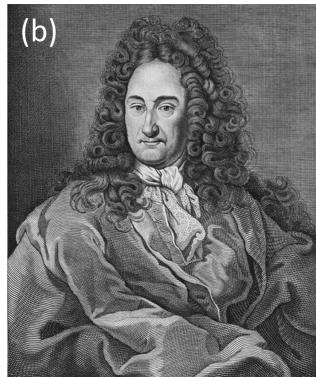
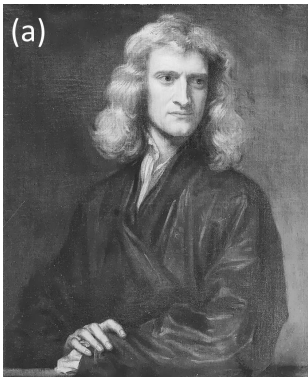


**Obr. 3:** Jak padá jablko.

Je zřejmé, že měnící se strmost křivky v jistém smyslu ilustruje rostoucí poměr vzdálenosti, o kterou se jablko propadne, k uběhlému času.

Studium vývoje poměru mezi čímsi, co zrovna prochází jakousi změnou v čase, je jednou z ústředních myšlenek kalkulu vůbec.

O kalkulu se někdy říká, že popisuje změnu, ale možná o něco lepší by bylo říct, že jde o *rychlost* této změny.



**Obr. 4:** (a) Isaac Newton (1642–1727),  
(b) Gottfried Leibniz (1646–1716).

Věc dostala opravdový spád ve druhé půli sedmnáctého století, a to zejména díky práci Isaaca Newtona v Anglii a Gottfrieda Leibnize v Německu.

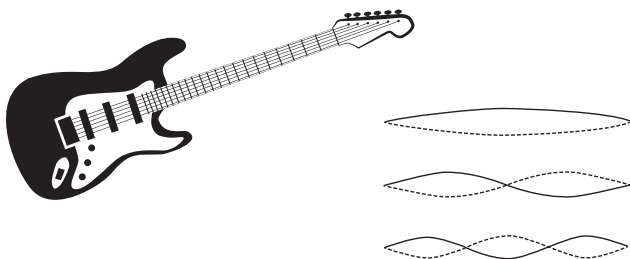
Ti dva se nikdy nepotkali. Probíhala ale mezi nimi jakási mírně ostražitá (a nepřímá) korespondence, která se zpočátku nesla v přátelském a zdvořilém duchu. Jak šel čas, přátelský duch se vytratil a vztah se vyvinul v ostrou hádku o to, kdo skutečně „vynalezl“ kalkulus.

K historii si řekneme více později, naším hlavním cílem v této knize však bude kalkulus sám.

Ze všeho nejvíce se budeme snažit o vykreslení tohoto tématu v celé jeho šíři a rozmanitosti. Soustředíme se na nejdůležitější myšlenky objevující se ve vývoji kalkulu a na některé jejich historické aspekty.

Uvidíme také, proč kalkulus zaujímá tak zásadní postavení v rozvoji fyziky a dalších věd.

Jedním z našich konkrétních cílů bude například rozvoj teorie do takové hloubky, abychom byli schopni pochopit, jak fungují vibrace kytarové struny (obrázek 5).

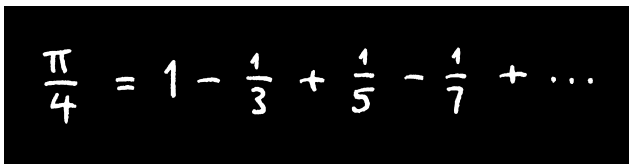


**Obr. 5:** Vibrace kytarové struny.

Budeme ale také klást důraz na ty případy, ve kterých máme z výsledků kalkulu potěšení jen pro ně

samotné, bez ohledu na nějaké případné praktické aplikace.

Kupříkladu na obrázku 6 vidíme překvapující souvislost mezi číslem  $\pi$  (o němž máme za to, že by se mělo týkat kružnic) a lichými čísly.


$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Obr. 6: Podivuhodná souvislost.

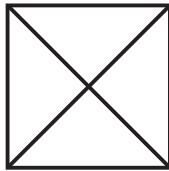
Mimo jiné se v pravou chvíli pokusíme dokázat, proč by vůbec něco takového mělo platit.

Krátce tedy lze říct, že tato knížečka je o něco ambicióznější, než vypadá. Pokud vše půjde dobře, dozvíme se nejen, co je to kalkulus, ale také *jak se do něj pustit*. Nejprve si však bude nutné trochu promyslet, jaká je vlastně podstata a duch matematiky samotné.

## 2

### DUCH MATEMATIKY

V babylonských sbírkách Yaleovy univerzity nalezneme slavnou hliněnou tabulku známou pod označením YBC 7289. Pochází z doby kolem roku 1700 před naším letopočtem a nachází se na ní jednoduchý geometrický obrazec (obrázek 7).



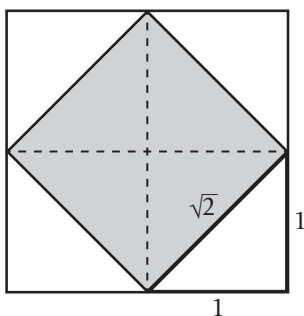
**Obr. 7:** Čtverec s úhlopříčkami.

Náčrtek je opatřen klínopisným textem, který, jak se ukázalo po jeho rozluštění, obsahuje přibližný výpočet čísla  $\sqrt{2}$ , a to s přesností lepší než jedna miliontina.

Jak mohl pisatel vědět, že ve čtverci je poměr délky úhlopříčky k délce strany roven  $\sqrt{2}$ ?

Můžeme se pouze dohadovat, ale mohlo to být tak, že se odvolal na diagram na obrázku 8.

Obsah velkého čtverce je roven  $2 \cdot 2 = 4$ . Obsah vystínovaného čtverce je evidentně roven polovině této hodnoty, tedy dvěma. Takže délka strany šedého čtverce musí být rovna  $\sqrt{2}$ .

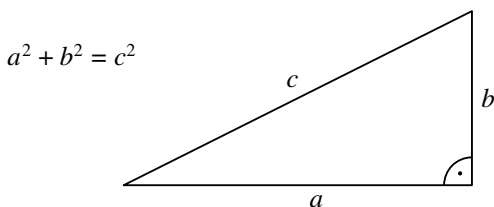


**Obr. 8:** Jednoduchá dedukce.

Uvedený deduktivní aspekt představuje způsob uvažování, který se v současné matematice považuje za základní.

Nespokojíme se s kladením jednoduchých otázek typu „Co platí?“. Místo toho nás zajímá „Proč to platí?“.

Matematici se, kdekoli je to možné, pídí po *obecnosti*. Zářným příkladem je Pythagorova věta, neboť z ní vyplývá překvapivě jednoduchý vztah mezi stranami  *kteréhokoli*  pravoúhlého trojúhelníka, ať je krátký a tlustý, nebo dlouhý a tenký.



**Obr. 9:** Pythagorova věta.

To, co řadí Pythagorovu větu mezi to nejlepší, co se kdy v matematice objevilo, je právě její naprostá obecnost.

## Algebra

Zatímco geometrie pochází z dob antického Řecka a snad i dřívějších, patří algebra, alespoň v té podobě, jak ji známe dnes, k mnohem mladším konceptům.

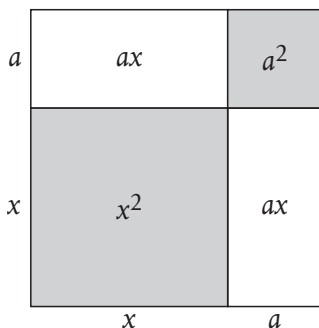
Dokonce i nám důvěrně známý symbol „=" se objevil až v roce 1557, tedy necelé jedno století předtím, než se narodil Newton.

Hlavním posláním algebry je, aby nám pomohla vyjádřit obecné matematické myšlenky a správně s nimi manipulovat co nejstručnějším způsobem.

Jedním z algebraických výsledků, který se ještě prokáže jako velmi užitečný, je vzoreček

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Tento vztah platí pro libovolná čísla  $x$  a  $a$ , kladná i záporná, a to díky pravidlům elementární algebry, ale v případě, kdy jsou obě čísla  $a$ ,  $x$  kladná, jej lze dokonce znázornit geometricky pomocí obsahů čtverců a obdélníků (obrázek 10).

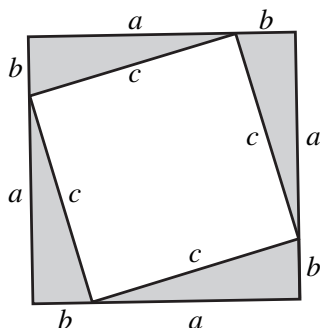


**Obr. 10:** Geometricky znázorněná algebra.

## Důkaz

V matematice se někdy stane, že vlastní deduktivní postup nebo důkaz je sám o sobě zdrojem potěšení.

Uvažujme například důkaz Pythagorovy věty na obrázku 11.



**Obr. 11:** Důkaz Pythagorovy věty.

Umístili jsme čtyři kopie našeho pravoúhlého trojúhelníka do čtverce o straně délky  $a+b$ , čímž vprostřed vznikl čtverec o ploše  $c^2$ .

Každý z pravoúhlých trojúhelníků má obsah  $\frac{1}{2}ab$ , takže obsah velkého čtverce je roven  $c^2 + 2ab$ .

Ale zároveň je roven  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

Tedy

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Uvedený důkaz Pythagorovy věty patří asi k těm nejlepším, a to pro jeho eleganci a výstižnost.

## Cesta ke hvězdám. . .

Během celé historie hrála matematika zásadní roli v našem nazírání na to, jak svět doopravdy funguje.

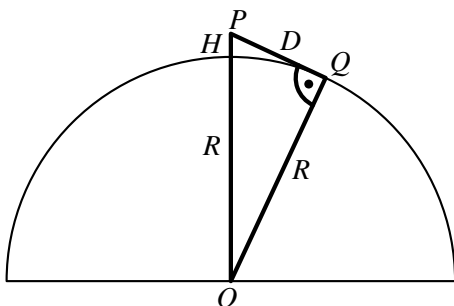
Zvláště povaha vesmíru byla vždy inspirací k přemýšlení. Abychom ji mohli studovat, je však nevyhnutelně nutné začít s měřením Země.

Jedním ze způsobů, jak se toho zhostit, je vylézt na horu o známé výšce  $H$  a odhadnout vzdálenost  $D$  od obzoru (obrázek 12). Díky tomu, že směr pohledu  $PQ$  je tečnou k povrchu Země, bude svírat pravý úhel s poloměrem  $OQ$ , a tedy  $OQP$  tvoří pravoúhlý trojúhelník.

Pomocí Pythagorovy věty dostaneme

$$(R + H)^2 = R^2 + D^2,$$

kde  $R$  je poloměr Země. Přepíšeme-li levou stranu rovnice do tvaru  $R^2 + 2RH + H^2$  a vyrušíme člen  $R^2$  společný oběma stranám, dostaneme  $2RH + H^2 = D^2$ .



Obr. 12: Měření Země.

Při praktických pokusech bude hodnota  $H$  zanedbatelná vzhledem k  $R$ , a tedy bude  $H^2$  zanedbatelné vzhledem k  $2RH$ . Proto je  $2RH$  přibližně rovno  $D^2$ , tedy

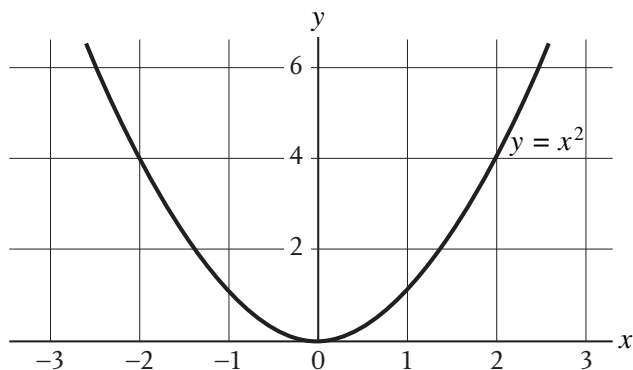
$$R \approx \frac{D^2}{2H}.$$

Někdy kolem roku 1019 využil podobné úvahy učenec Al-Birúní k odhadu velikosti poloměru Země. Výsledek, který obdržel, se od hodnoty, kterou považujeme dnes za správnou, liší o méně než jedno procento. Na svou dobu šlo o naprosto mimořádný výkon.

## Rovnice a křivky

Tuto kapitolu zakončíme upozorněním na jedno velmi zajímavé místo, kde se algebra a geometrie potkávají.

Máme-li dnes k dispozici nějaký vztah mezi dvěma čísly, řekněme  $y = x^2$ , nic nám nebrání chápat  $x$  a  $y$  jako *souřadnice*, pomocí nichž pak sestrojíme graf uvedené závislosti (obrázek 13).



Obr. 13: Souřadnicová geometrie.

Naše rovnice je pak reprezentována křivkou. A naopak, když nějaká geometrická úloha obsahuje jistou křivku, snažíme se ji popsat algebraickou rovnicí.

V Newtonově době byla ale tato myšlenka zcela nová. Vděčíme za ni zejména dvěma francouzským matematikům, Pierru de Fermatovi (1601–1665) a Renému Descartesovi (1596–1650).

Teď jsme se sice už docela dost přiblížili ke kalkulu, pojdme se ale ještě podívat na jednu klíčovou myšlenku. . .

# 3

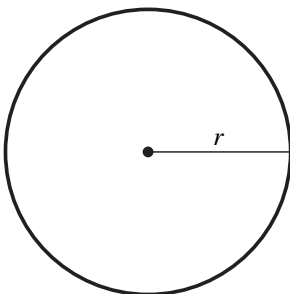
## NEKONEČNO

Nekonečno se do našeho příběhu dostává velice záhy, a sice v Archimedově době, tedy někdy kolem roku 220 př. n. l.

Přesněji řečeno jde o myšlenku postupného *přibližování se* k nekonečnu. Začneme několika příklady.

### Obsah kruhu

Oba vzorečky na obrázku 14 patří k nejznámějším matematickým vzorcům všech dob. Proč ale vlastně platí?



$$\text{obvod} = 2\pi r$$

$$\text{obsah} = \pi r^2$$

**Obr. 14:** Vzorce pro kruh.

Tak tedy, pro účely této knížky budeme definovat číslo  $\pi$  předpisem

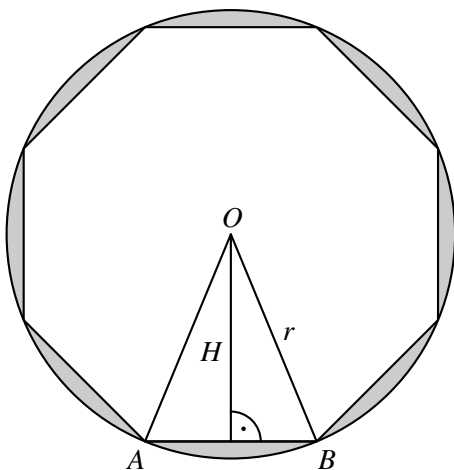
$$\pi = \frac{\text{obvod kruhu}}{\text{průměr}},$$

protože tento poměr je společný všem kruhům.

Je-li poloměr kruhu roven  $r$ , potom je jeho průměr roven  $2r$ , a tedy první vzorec na obrázku 14 plyne přímo z definice. Jde víceméně o pouhé přeformulování toho, co přesně označuje číslo  $\pi$ .

Zato druhý vzorec, tedy „obsah =  $\pi r^2$ “, je z úplně jiného těsta.

Abychom pochopili, proč tato formule platí, postupujme podle Archimeda (prozatím poměrně volně) a spolu s ním vpisujme do kruhu pravidelné mnohoúhelníky o  $N$  stranách (obrázek 15).



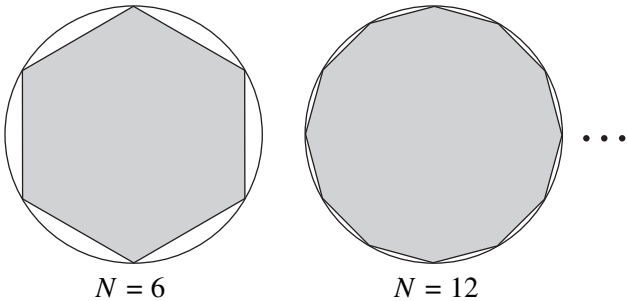
**Obr. 15:** Aproximace kruhu.

Každý takový mnohoúhelník se skládá z  $N$  trojúhelníků typu  $OAB$ , kde  $O$  je střed kruhu. Obsah každého z těchto trojúhelníků je roven polovině součinu délky jeho základny  $AB$  a výšky  $H$ . Celkový obsah  $N$ -úhelníka bude tedy roven  $N$ -násobku této hodnoty, tedy  $\frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot H \cdot N$ .

Ale  $(AB) \cdot N$  je délka obvodu  $N$ -úhelníka, tedy

$$\text{obsah } N\text{-úhelníka} = \frac{1}{2} \cdot \text{obvod } N\text{-úhelníka} \cdot H.$$

Myšlenka spočívá v pozorování, co se bude dít, bude-li  $N$  stále větší a větší, tedy budeme-li neustále zvyšovat počet stran mnohoúhelníka (obrázek 16).



**Obr. 16:** Blíže a blíže...

Je zřejmé, že bude-li  $N$  narůstat, pak se bude obvod  $N$ -úhelníka stále více přibližovat hodnotě obvodu kruhu, tedy  $2\pi r$ .

Zároveň se  $H$  bude stále více přibližovat hodnotě  $r$ .

Takže se obsah mnohoúhelníka stále více a více přibližuje hodnotě

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r,$$

což je rovno  $\pi r^2$ .

## Pojem limity

Měli bychom raději hned přiznat, že celé toto naše povídání o „dostávání se blíže a blíže“ je přinejlepším trochu vágní.

Mohli bychom se vyjádřit přesněji a říct, že obsah kruhu je *limitou* obsahu mnohoúhelníků pro  $N \rightarrow \infty$ , tedy pro  $N$  jdoucí do nekonečna.

Tím zhruba řečeno myslíme to, že vezmeme-li  $N$  dostatečně veliké, pak budeme schopni učinit rozdíl mezi oběma obsahy libovolně malý.

Právě uvedená myšlenka limity je ústřední ideou celého kalkulu, zatím je však velice choulostivá a budeme ji v dalším textu muset pořádně vyplatit a zocelit.

Věci také moc nepomáhá to, že vlastní slovo „limita“ označuje něco úplně jiného, než výraz „limit“, který důvěrně známe z každodenní praxe.

Tedy (a teď hovoříme opravdu velmi nepřesně) alespoň prozatím pro nás bude matematický pojem limity jakousi hodnotou, k níž se budeme umět přiblížit *libovolně blízko*, pokud *se budeme opravdu snažit*.

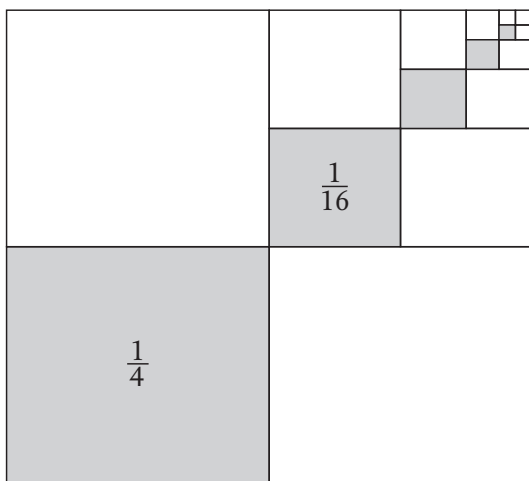
## Nekonečná řada

Další cestou, kterou se do našeho příběhu může vloudit nekonečno, je koncept *nekonečné řady*, což je objekt typu

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

Na první pohled hned vidíme, že jde o cosi velice podivuhodného. Protože na levé straně sčítáme kladné hodnoty, se sčítáním nikdy nepřestaneme (jak naznačují tři tečky), a přesto vyjde součet na pravé straně konečný, tedy  $\frac{1}{3}$ .

Pro tuto chvíli si dovolíme „důkaz obrázkem“, na kterém je znázorněn čtverec o straně 1. Tento čtverec je poskládán z posloupnosti stále se zmenšujících a zmenšujících čtverečků (obrázek 17).



Obr. 17: „Důkaz obrázkem“.

Obsah vystínované oblasti pak představuje součet naší nekonečné řady, a je snad zřejmé, že vyznačená plocha zabírá třetinu celkové plochy čtverce, protože čtverec vlevo dole má po svých dvou stranách jednu svou přesnou kopii a ve čtverci vpravo nahoře se celá situace opakuje.

Je třeba ovšem znovu přiznat, že i právě uvedený důkaz má jisté mezery a že byl proveden poněkud ležérně. Trochu lepší představu o významu vzorečku

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Vážení čtenáři, právě jste dočetli ukázkou z knihy Kalkulus a jeho dobrodružství.  
Pokud se Vám ukázka líbila, na našem webu si můžete zakoupit celou knihu.