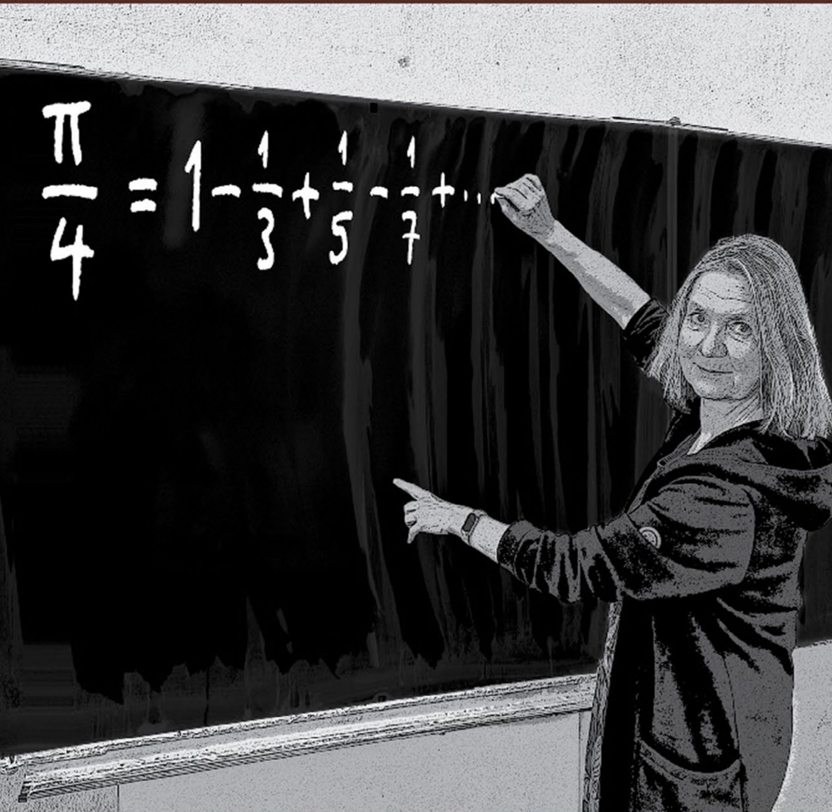
Duch matematiky

Algebra a další lahůdky

David Acheson



DOKOŘÁN

Duch matematiky

Algebra a další lahůdky

David Acheson

DOKOŘÁN

David Acheson

Duch matematiky

Algebra a další lahůdky

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu *The Spirit of Mathematics: Algebra and All That* přeložil Jiří Rákosník.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Redakce Marie Černá.
Vydalo v roce 2025 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5,
dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 1 341. publikaci (471. elektronická).

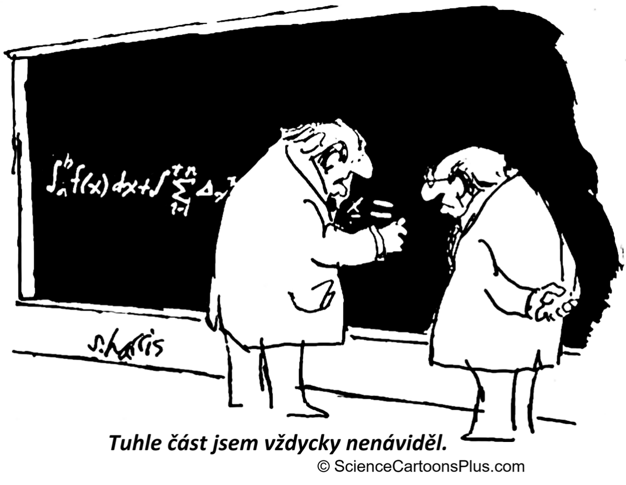
ISBN 978-80-7675-251-1

Obsah

1
ÚVOD

Je vůbec možné zachytit ducha matematiky v celé jeho kráse pouze pomocí jednoduchých prostředků?

Určitě ano, věnujeme tomu celou tuto knihu. A těmi „jednoduchými prostředky“ jsou jen nejzákladnější části aritmetiky, algebry a geometrie, s nimiž se všichni setkáváme ve škole.



Obr. 1: Matematika v akci.

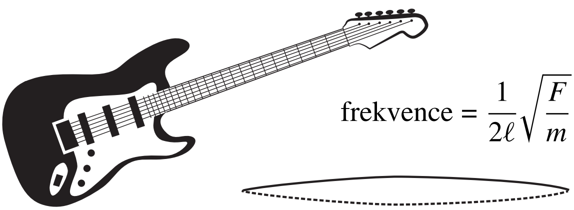
Asi nejtajemnější z nich je pro většinu lidí algebra.

A celé tajemství lze často shrnout do jediné otázky: k čemu vlastně algebra je?

* * *

Algebra nám především pomáhá vyjádřit *obecné* myšlenky a tvrzení v matematice. Asi nejjednodušeji to lze objasnit na pojmu vzorce.

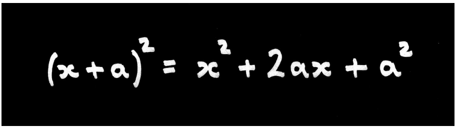
Na obrázku 2 je například vzorec vyjadřující frekvenci kmitů struny na kytaře. Později uvidíme nejen to, co jednotlivé symboly označují, ale také jak vzorec skutečně funguje v praxi.



Obr. 2: Kmity struny na kytaře. Písmeno *F* označuje sílu napínající strunu, ℓ její délku a *m* její hmotnost vztaženou k jednotce délky.

* * *

Zcela jiný druh obecnosti v algebře ukazuje rovnost na obrázku 3, která má čistě matematický charakter a platí pro *všechna* čísla x a a, ať kladná nebo záporná.



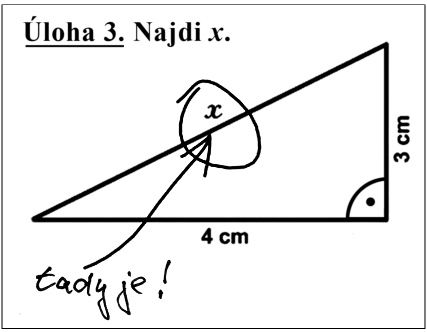
Obr. 3: Algebra v celé své kráse.

Věřte nebo ne, tahle konkrétní rovnost bude v naší knize hrát „hvězdnou roli“. Až přijde čas, ukážeme, také, co jednotlivé symboly znamenají a proč sama rovnost platí.

* * *

V tomto okamžiku jsou možná někteří čtenáři trochu zmateni a v duchu si říkají: „Myslel jsem si, že smyslem algebry je *najít x*.“

Je rozhodně pravda, že určování nějakého neznámého čísla hrálo v historii algebry vždycky velkou roli.



Obr. 4: Žert, nebo správné řešení školní úlohy? Kdo ví.

Mnozí z nás v algebře začínají jednoduchými úlohami typu:

> Za 7 let mi bude dvakrát tolik let, co mi bylo před 7 lety. Kolik let je mi nyní?

Když můj současný věk (vyjádřený počtem let) označíme x, pak úloha fakticky říká, že

$$x + 7 = 2(x - 7).$$

Roznásobením závorky na pravé straně dostaneme

$$x + 7 = 2x - 14$$

a po odečtení x od obou stran dospějeme k tomu, že $x - 14 = 7$.

Je mi tedy 21. (Nu, o tom bych si mohl nechat tak leda zdát.)

Jediný problém takových úloh je v tom, že jsou značně umělé a nepřirozené.

Či dokonce naprosto směšné.

2

Co všechno se přihodilo *A*, *B* a *C*?

Když jsem v padesátých letech minulého století chodil do školy, řešili jsme spousty úloh následujícího typu:

> *A* a *B* společně naplní vanu za 4 hodiny. *A* a *C* dokážou společně naplnit stejnou vanu za 5 hodin. *B* ji plní dvakrát rychleji než *C*. Za jak dlouho vanu naplní *C* sám?

Obr. 5: Matematické plnění vany.

Trik v úlohách tohoto druhu vždycky spočívá v tom, zaměřit se na *podíl* úkolu, který každá osoba dokáže splnit za určitý čas – třeba za 1 hodinu.

Když tyto podíly označíme a, b a c, pak víme, že

$$
\begin{aligned}
a + b &= \frac{1}{4},\\
a + c &= \frac{1}{5},\\
b &= 2c,
\end{aligned}
$$

protože A a B spolu naplní za 1 hodinu $\frac{1}{4}$ vany a tak dále.

Takovým způsobem tedy získáváme tři rovnice pro tři „neznámé“ a, b a c.

Vlastně nás zajímá jen hodnota c, takže bude rozumné zkusit se zbavit a i b.

Zbavit se b je snadné. Použijeme třetí rovnici $b = 2c$ a dosadíme v první rovnici za b. Dostaneme

$$a + 2c = \frac{1}{4}.$$

Když pak druhou rovnici přepíšeme ve tvaru $a = \frac{1}{5} - c$, můžeme ho použít k odstranění a,

$$\frac{1}{5} - c + 2c = \frac{1}{4},$$

což se zjednoduší na

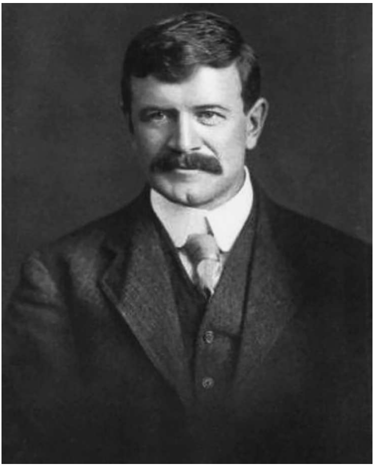
$$c = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}.$$

C tedy dokáže naplnit $\frac{1}{20}$ vany za 1 hodinu, takže bude potřebovat 20 hodin, aby sám naplnil celou vanu. To je ovšem docela příšerná představa.

Lidský prvek v matematice?

Je snadné si z takových úloh dělat legraci, i když asi ne tak dovedně, jak to udělal kanadský humorista Stephen Leacock ve své povídce, která vyšla poprvé v roce 1910.

Leacock tvrdí, že *A* je ze všech tří vždycky ten nesilnější a plný energie, *B* je slabší a *C* je chudinka.



Obr. 6: Stephen Leacock (1869–1944), autor povídky „A, B a C aneb matematika z lidské stránky".

Podle Leacocka totiž

> Chudák *C* je zakrslý a neduživý človíček s plačtivým výrazem. Stálé kráčení, kopání a pumpování mu podlomilo zdraví a pocuchalo nervy… Jak Hamlin Smith říká: „*A* vykoná za jednu hodinu tolik práce, kolik *C* za čtyři hodiny."

Existuje však jistý doklad toho, že Leacock své bádání neprovedl tak důkladně, jak by se čekalo.

James Hamblin Smith, na kterého se Leacock odvolává (i když mu trochu komolí jméno), byl totiž v 19. století velmi úspěšným soukromým učitelem v Cambridgi. Když se podíváme na stránku 172 jeho knihy *Treatise on Arithmetic* (Pojednání o aritmetice) z roku 1889, skutečně tam najdeme *A*, *B* a *C* věnující se spoustě úkolů včetně toho z ukázky na obrázku 7.

(6) *A* does a piece of work in 3 hours, which is twice the time *B* and *C* together take to do it; *A* and *C* could together do it in $1\frac{1}{3}$ hours. How long would *B* alone take to do it?

Obr. 7: Z *Pojednání o aritmetice* Hamblina Smithe: (6) *A* vykoná určitou práci za 3 hodiny, což je dvakrát déle, než by na to potřebovali *B* a *C* společně; *A* s *C* by to zvládli za $1\frac{1}{3}$ hodiny. Za jak dlouho by to udělal *B* sám?

Děje se tu však něco velmi zvláštního.

Tvrdí se, že *A* zvládne práci za 3 hodiny. Představme si na chvíli, že *A* má bratra dvojče. Společně tu práci udělají za $1\frac{1}{2}$ hodiny. Když však pracuje s *C*, zvládnou to rychleji, za pouhých $1\frac{1}{3}$ hodiny.

To znamená, že *C* musí pracovat rychleji než *A*!

Další vyšetřování odhalí, že *C* pracuje také rychleji než *B*. Takže *C* je hvězda.

Neméně pozoruhodné je, že *B* nakonec zešílí (obrázek 8).

(468) *A* can do a piece of work in 6 days, which *B* can destroy in 4. *A* has worked for 10 days, during the last 5 of which *B* has been destroying: how many days must *A* now work alone, in order to complete his task?

Obr. 8: Nečekaný obrat v Smithově *Pojednání o aritmetice*: (468) *A* vykoná za 6 dnů určitou práci, kterou *B* dokáže zničit za 4 dny. *A* pracoval 10 dnů a *B* to během posledních 5 dnů ničil. Kolik dnů nyní musí *A* pracovat sám, aby svůj úkol dokončil?

Elegantní plnění vany?

Ač se to může zdát divné, i plnění vany nabízí příležitosti pro elegantní matematiku.

Uvažujme například následující úlohu:

> A s B naplní vanu za 3 hodiny, A s C to zvládnou za 4 hodiny a B s C za 6 hodin. Za jak dlouho by ji naplnili všichni tři společně?

Začneme stejně jako prve tím, že části vany, které každý z nich sám naplní za 1 hodinu, označíme a, b a c. Dostaneme následující tři rovnice:

$$a + b = \frac{1}{3},$$
$$a + c = \frac{1}{4},$$
$$b + c = \frac{1}{6}.$$

Rovnice bychom nyní mohli řešit podobným postupem jako prve. Mohli bychom hledat c, a jakmile bychom ho našli, hodnoty a a b bychom docela rychle vypočetli z druhé a třetí rovnice.

Je však dobré si uvědomit, že konkrétní hodnoty a, b a c prostě nejsou v této konkrétní úloze důležité. Jediné, co potřebujeme k odpovědi na otázku „jak dlouho by pracovali společně“, je *součet* $a + b + c$.

Je tu však šikovnější postup, jak ho získat.

Prostě si uvědomíme, že

$$2(a + b + c) = (a + b) + (a + c) + (b + c) =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6},$$

což rovnou dává hodnotu $a + b + c = \frac{3}{8}$, a z toho už plyne doba $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ hodiny, za kterou všichni tři naplní celou vanu.

Takže tu máme – bez ohledu na smyšlené a tak málo inspirativní prostředí – výborný příklad elegantní matematiky využívající pouze jednoduché prostředky.

3

Trik s číslem 1089

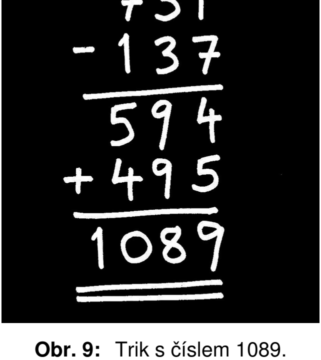
Matematika ve své nejlepší podobě často obsahuje prvek *překvapení*. Jednoduchým příkladem je následující kouzelnický trik.

Začneme tím, že napíšeme nějaké trojciferné číslo.

Může být jakékoli, jen jeho první číslice musí být aspoň o 2 větší než poslední.

Teď to číslo zapíšeme pozpátku a odečteme od prvního čísla. Výsledek opět zapíšeme pozpátku a k výsledku přičteme.

Nakonec vždycky vyjde 1089.



Obr. 9: Trik s číslem 1089.

Obr. 10: Vzrušující okamžik z dávné doby.

Poprvé jsem na to narazil jako desetiletý v brožurce pro rok 1956 z edice *I-Spy Annual* (obrázek 10).

I když to nebyla zrovna „vážná“ matematika, vyrazilo mi to dech.

Proč to funguje?

Označme číslice výchozího čísla a, b a c, přičemž $a - c$ je větší než 1. Výchozí číslo je tedy rovno

$$100a + 10b + c,$$

a když ho napíšeme pozpátku a odečteme, dostaneme

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) &= \\ &= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = \\ &= 99a - 99c = \\ &= 99(a - c). \end{aligned}$$

Na konci první části triku tedy máme vždy násobek 99.

Rozdíl $a - c$ je alespoň 2 a není větší než 9. Násobky přicházející v úvahu tedy jsou

$$
\begin{gathered}
198\\
297\\
396\\
495\\
594\\
693\\
792\\
891,
\end{gathered}
$$

a když ten seznam čísel postupně projdeme shora dolů, vidíme, že první číslice se v každém kroku zvětší o 1, zatímco poslední se o 1 zmenší.

V tom není žádná záhada, protože přičíst 99 je totéž jako přičíst 100 a odečíst 1. První a poslední číslice proto v součtu dávají vždy 9.

Jestliže tedy kterékoli z těch čísel sečteme s tímtéž číslem zapsaným pozpátku – což je závěrečný krok „triku“, dostaneme z první číslice devět stovek, ze třetí číslice devět jednotek a dvakrát 90 z druhé číslice, což celkem dává

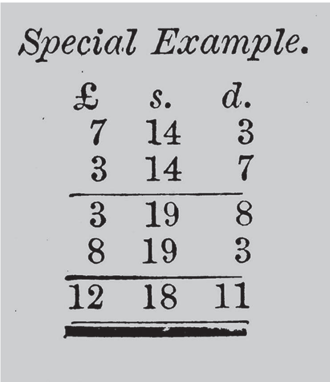
$$900 + 9 + 180 = 1089.$$

Kdo na to přišel?

Historie uvedeného triku je poněkud zvláštní.

V časopisu *The Boy's Own Paper* (Noviny pro chlapce) v roce 1893 byla otištěna verze užívající libry, šilinky a pence!

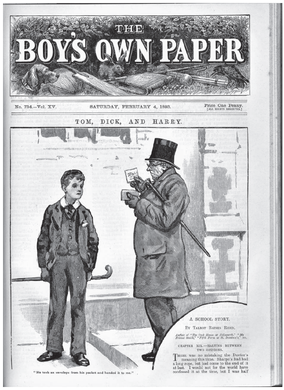
Konečný výsledek pak je vždy 12 liber, 18 šilinků a 11 pencí.



Special Example.

£	s.	d.
7	14	3
3	14	7
3	19	8
8	19	3
12	18	11

(a)



(b)

Obr. 11: Z vydání *Novin pro chlapce* pro rok 1893.
Zde 1 libra (£) je 20 šilinků (*s*) a 1 šilink je 12 pencí (*d*).

Existuje zajímavá možnost, že tuto verzi triku objevil oxfordský matematik Charles Dodgson, známější jako Lewis Carroll, autor *Alenky v říši divů*. Jediným dokladem však může být kniha *The Lewis Carroll Picture Book* (Obrazová kniha o Lewisi Carrollovi) z roku 1899, kterou sestavil jeho synovec a trik v ní popisuje jako

> numerickou zajímavost, kterou, pokud vím, objevil pan Dodgson.

Vážení čtenáři, právě jste dočetli ukázku z knihy ***Duch matematiky*****.**
Pokud se Vám ukázka líbila, na našem webu si můžete zakoupit celou knihu.