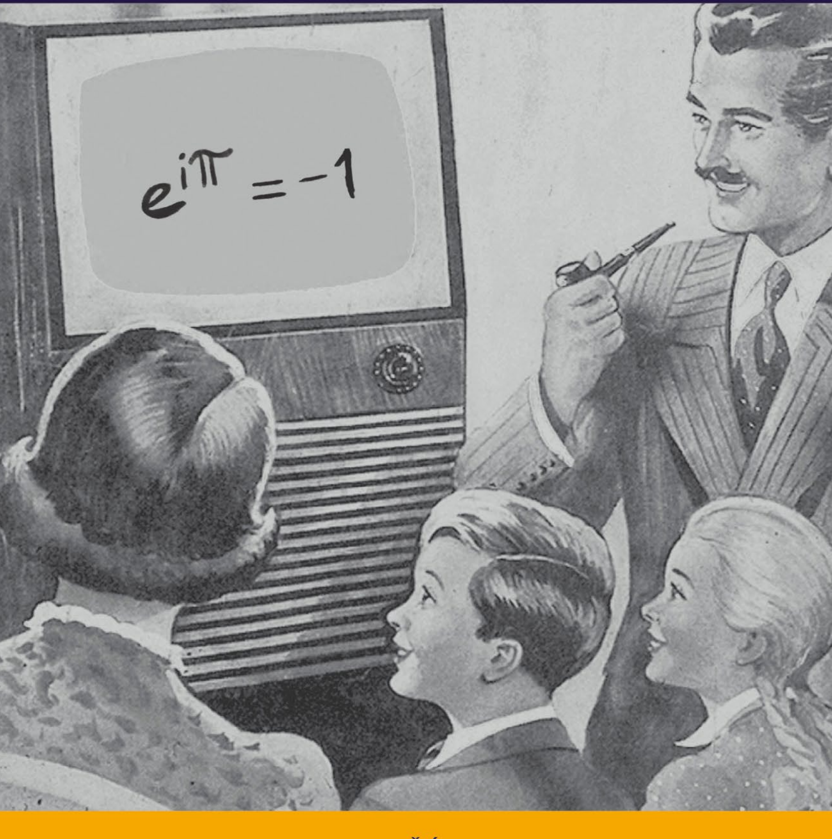
1089
a další parádní čísla

Matematická dobrodružství

David Acheson



DOKOŘÁN

1089
a další parádní čísla

Matematická dobrodružství

David Acheson

DOKOŘÁN

David Acheson

1089
a další parádní čísla
Matematická dobrodružství

Třetí vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu *1089 & All That: A Journey into Mathematics* přeložil Luboš Pick.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník. Redakce Tereza Ješátková.
Sazba Didot.Litografické studio, s. r. o., Truhlářská 17, Praha 1.
Konverze do elektronické verze a obálka
(s použitím obrázku Steva Bella) Michal Puhač.
Vydalo v roce 2025 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5,
dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 1 338. publikaci (468. elektronická).

ISBN 978-80-7675-248-1

Obsah

Kapitola 1

1089 A DALŠÍ PARÁDNÍ ČÍSLA

Myslete si nějaké trojciferné číslo. Může to být zcela libovolné trojciferné číslo, ale první číslice se musí od třetí lišit alespoň o dvě. Napište jej v převráceném tvaru a z takto vzniklých dvou trojciferných čísel odečtěte to menší od většího. Například

$$782 - 287 = 495\,.$$

Nyní napište výsledné číslo v převráceném tvaru a obě čísla sečtěte:

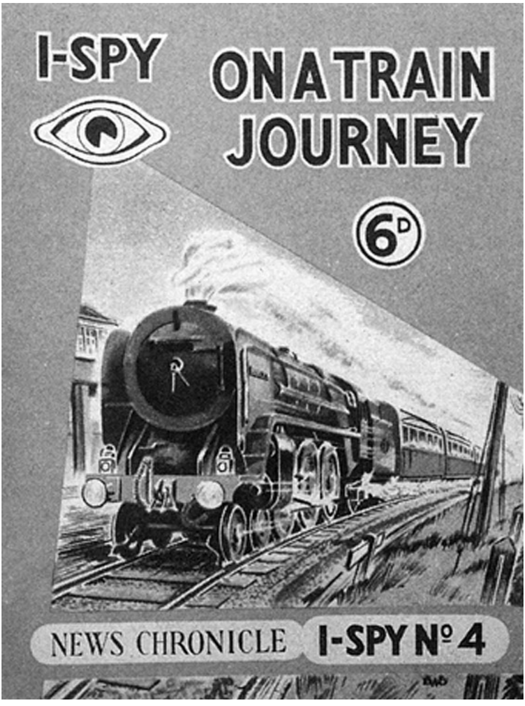
$$495 + 594 = 1\,089\,.$$

Na konci celé procedury vyšlo 1089. Dejme tomu, a co má být? Příště jistě vyjde něco jiného, je přeci jasné, že výsledek závisí na volbě výchozího čísla, ne? Jenomže on na něm právě *nezávisí*.

Výsledek bude vždy roven 1089, ať už na počátku zvolíte jakékoli trojciferné číslo.

* * *

Tento „trik 1089“ byl prvním matematickým kouskem, který na mne opravdu hluboce zapůsobil. Bylo mi deset let, když jsem jej našel v ročence časopisu *I-SPY* z roku 1956. Byla to kniha pro děti, kterou vy-



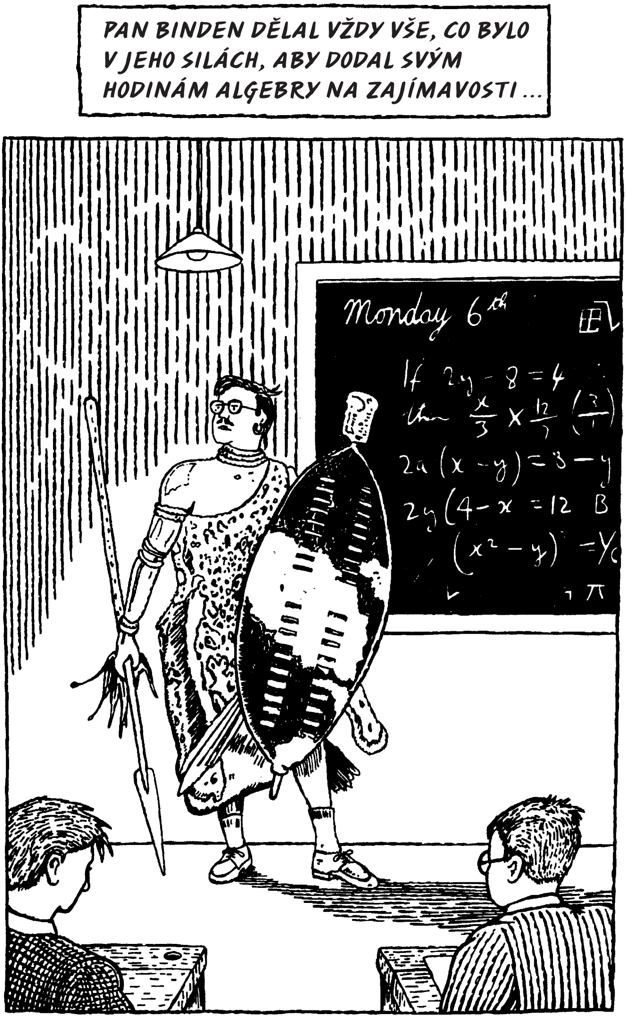
dal známý britský deník té doby, a která obsahovala něco málo dobrodružných příběhů a o něco více vzdělávacích článků typu „Život v rybníku“.

Článek, který nejvíce ze všech zaujal mne, ovšem vypadal takto:

KOUZLO S ČÍSLY
Kouzelník drží v ruce prázdnou tabulku, na kterou napíše číslo, které nikomu neukáže. Pak požádá některého kamaráda, aby na kus papíru napsal jakékoli trojciferné číslo sestávající ze tří různých číslic, potom aby toto číslo napsal v převráceném tvaru, odečetl nižší číslo od vyššího, a nakonec aby převrátil výsledné číslo a přičetl jej k výsledku odčítání. Když je vše hotovo, obrátí kouzelník tabulku a ukáže, že na ní má napsané číslo 1089.
VYSVĚTLENÍ ZÁHADY
Bez ohledu na výchozí číslo bude výsledek vždy roven 1089.

Zmíněná knížka obsahovala i jiné kouzelnické triky, třeba „zmizení sklenice vody“ nebo „čtení myšlenek“, ale z nějakého důvodu to byl „trik 1089“, který opravdu získal moji pozornost.

Myslím, že právě díky onomu prvku záhadnosti a překvapení se tento výsledek zařadil do úplně jiné kategorie než většina věcí, které jsme dělali ve škole.


PAN BINDEN DĚLAL VŽDY VŠE, CO BYLO
V JEHO SILÁCH, ABY DODAL SVÝM
HODINÁM ALGEBRY NA ZAJÍMAVOSTI ...
Monday 6th

© Glen Baxter

Neříkám, že mě nebavily sumy a další prvky elementární matematiky, protože mě téměř nepochybně bavily. Pro ilustraci vám nicméně sdělím, že typická domácí úloha v té době vypadala asi takto:

> A a B společně napumpují vodu do nádrže za 4 hodiny. A a C naplní tutéž nádrž za 5 hodin. B pracuje dvojnásobnou rychlostí než C. Určete, za jak dlouho naplní nádrž sám C.*

Myslím, že tedy celkem snadno pochopíte, proč mě „trik 1089“ tak oslnil.

* * *

Dnes, po více než čtyřiceti letech, se mi zdá, že tentýž prvek tajemství a překvapení je společným jmenovatelem pro to nejlepší, co matematika nabízí. Některé z prvotřídních matematických vět a výsledků skutečně vytvářejí dojem jakéhosi *zázraku.*

Doufám, že vám něco z toho předvedu v této knížce. Dále věřím, že vám budu moci ukázat, kolik radosti může skýtat aktivní podíl na deduktivních úvahách, s jejichž pomocí se tyto věty *dokazují*.

A nedosti na tom, uvidíme také několik pozoruhodných aplikací matematiky v přírodních vědách a v přírodě samé.

---

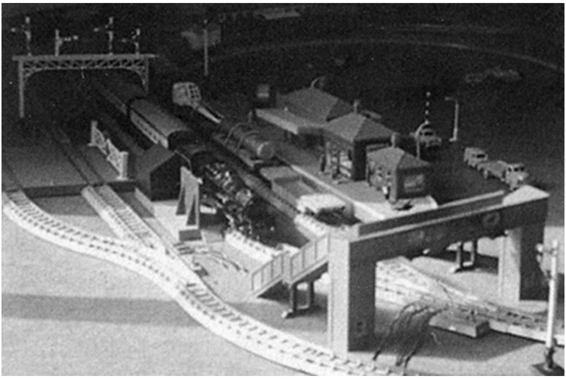
* Chudák C bude pumpovat dlouhých 20 hodin.

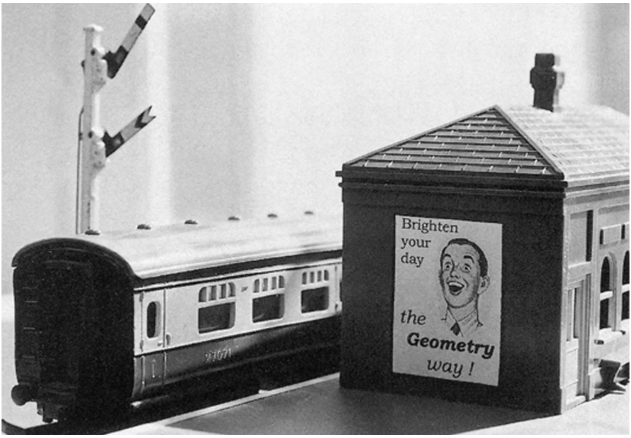
Ať už jste velice mladí nebo hodně staří a nebo něco mezi tím, ať jste ve škole nebo na univerzitě a nebo nic z toho, ať máte v ruce pero nebo gin s tonikem, vydejte se spolu se mnou na projížďku.

Po cestě se seznámíme s některými nejdůležitějšími matematickými nápady a také trochu s jejich historií.

Krátce řečeno, vydáme se od prvních krůčků až k samotným hranicím vědy, a aby nám cestou neutekl „hlavní cíl“, budeme se pohybovat dost rychle.

Kdybychom si kupříkladu představili, že jedeme vlakem, pak bychom jej mohli nazvat *Matematickým expresem.*





Kapitola 2

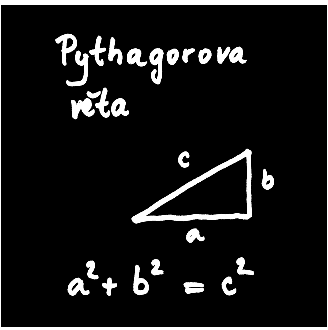
Láska ke geometrii

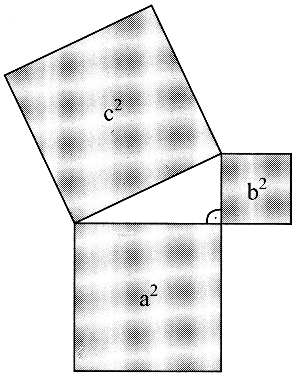
Jeden z nejlépe doložených případů, kdy někoho opravdu pořádně překvapila matematika, popisuje následující historka o filozofovi Thomasi Hobbesovi (1588–1679):

> Čtyřicet jar byl již stár, a přec ponejprv on s geometrií se obeznámil; toto událo se náhodou. Procházeje se pánskou knihovnou, tu uzřel na stole otevřenou knihu „Základy" od Eukleida, a to *47 El. libri 1.* Přečetl si Tvrzení. Ach, pane B..., pravil k sobě, (míval ve zvyku klít, aby slovům důrazu dodal) *to přec je nemožné!*

Zde tedy máme příklad matematického kousku nejvyšší kvality, neboť Hobbesovi se zdál výsledek natolik ohromující, že se mu zdráhal uvěřit.

Tvrzení, o které šlo, nebylo nic jiného než *Pythagorova věta:* nechť a, b a c jsou strany pravoúhlého trojúhelníka, z nichž c je nejdelší; potom $a^2 + b^2 = c^2$.





Hobbes ovšem nebyl z těch, kdo jen tak uvěří nějakému tvrzení na potkání; přečetl si *důkaz.* Více než cokoli jiného právě důkaz způsobil, že náhle pocítil

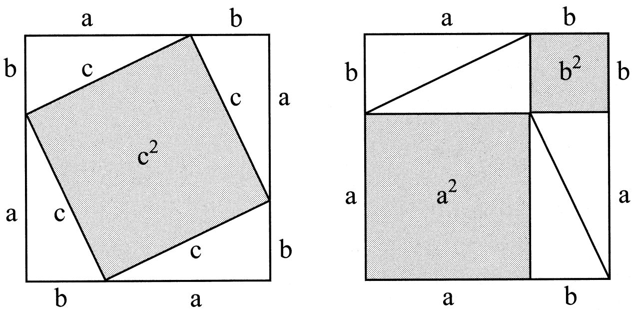
...lásku ke geometrii.

Tak tedy i my si nyní dokážeme Pythagorovu větu.

* * *

Je mi pochopitelně jasné, že leckoho napadne, proč se s něčím takovým vůbec zdržovat. Koneckonců, ta věta je na světě přes dva tisíce let a každý ji zná. Kdyby náhodou neplatila nebo kdyby na ní bylo něco v nepořádku, *tak by si toho snad někdo všiml.*

V matematice je ovšem úvaha podobného typu vpodstatě k ničemu. Navíc, ať je to jak chce, rozkošně jednoduchý důkaz, který předvedeme, je skoro zábavný.



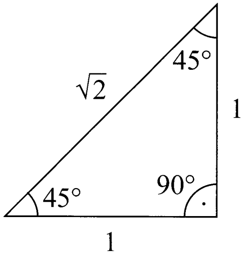
Vezmeme si čtverec o straně $a + b$ a umístíme do něj čtyři kopie výchozího pravoúhlého trojúhelníka podle náčrtku. Zbyde čtverec o ploše c^2. Představme si bílé dlaždičky trojúhelníkového tvaru na tmavé podlaze a posuňme tři z nich do nových pozic naznačených na obrázku. Obsah plochy, která *není* pokryta dlaždičkami, teď činí $a^2 + b^2$, musí však být stejný jako před posunutím.

Takže $a^2 + b^2 = c^2$.

* * *

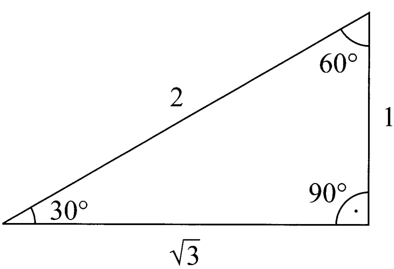
Dva speciální případy Pythagorovy věty stojí za zvláštní zmínku.

V prvním z nich jsou oba ostré úhly v pravoúhlém trojúhelníku rovny 45°:



Je-li délka obou kratších stran rovna řekněme jedné, pak délka nejdelší strany je $\sqrt{2}$. Tímto přirozeným způsobem se na scéně objevuje druhá odmocnina ze dvou.

Další běžně se vyskytující případ je ten, kdy jsou ostré úhly rovny 30° a 60°:

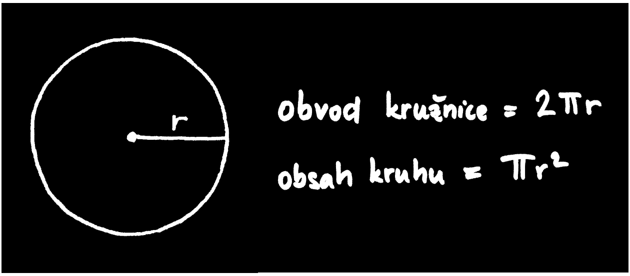


To ale opravdu *jsou* jen speciální případy. Skutečná síla a význam Pythagorovy věty spočívá v její *obecnosti;* věta platí bez ohledu na to, zda je pravoúhlý trojúhelník krátký a tlustý nebo dlouhý a tenký.

A my to víme nikoli proto, že nás o tom ujistil jakýsi profesor X, zřejmě světový odborník, ale proto, že jsme se o tom přesvědčili sami.

* * *

Je-li Pythagorova věta vůbec nejznámějším geometrickým výsledkem všech dob, pak druhým v pořadí bude nepochybně vzoreček pro obvod kružnice a obsah kruhu o poloměru *r*:



Touto přirozenou cestou se zase pro změnu do matematiky dostává číslo

$\pi = 3{,}14159\ldots$

V elementární matematice se π týká výhradně kulatých objektů.

Tudíž si asi umíme představit překvapení, které čekalo na matematiky sedmnáctého století, když potkávali π v nejrůznějších oblastech matematiky, jež neměly s kruhy vůbec nic společného.

Jedním z nejznámějších výsledků tohoto typu je neobyčejný vztah mezi π a *lichými čísly:*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Zde, jak naznačují tečky, máme na mysli sčítání a odčítání zlomků na pravé straně až *do nekonečna*. Tím pádem není předem jisté ani to, zda vůbec suma dává nějakou určitou hodnotu.

Ale i kdyby dávala, tak proč právě $\frac{\pi}{4}$? Co mají u všech všudy co dělat kružnice s lichými čísly 1, 3, 5, 7, ...?

Překvapující *vztahy* tohoto typu jsou právě tím, co matematiky opravdu fascinuje.

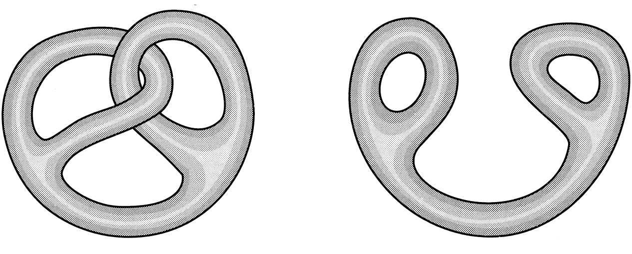
* * *

Soudobá geometrie o mnoho přesahuje svět pravoúhlých trojúhelníků, kruhů, a podobně. Dokonce existují taková její odvětví, ve kterých pojmy délky, úhlu nebo obsahu plochy nemají žádný smysl.

Jedním z nich je *topologie* – jakási geometrie na gumové podložce – která řeší základní otázku, zda je možné nějaký předmět „hladce“ zdeformovat do jiného tvaru.

Otázky tohoto druhu mohou být velmi náročné a dokonce v rozporu s intuicí.

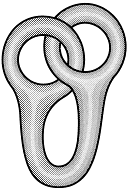
Pohleďme například na dva geometrické tvary na obrázku a položme si otázku, zda je možné spojitou deformací přeměnit předmět nalevo na předmět napravo.



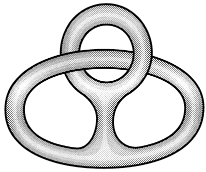
Představme si, prosím, že je tento předmět vyroben z nějakého opravdu vysoce elastického materiálu, takže je možné jej libovolně natahovat a smršťovat.

Bylo by pak možné tento objekt deformovat – aniž bychom jej řezali nebo trhali – do onoho „rozpojeného“ tvaru?

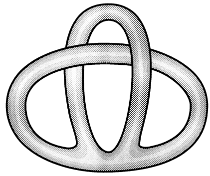
Kupodivu, *je* to možné:



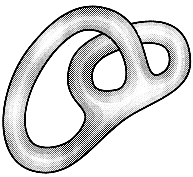
1



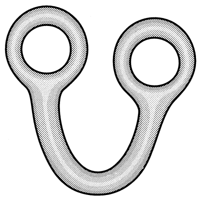
2



3



4



5

* * *

Na závěr této kapitoly se ale vrátíme k jednomu z nejdůležitějších odkazů řecké geometrie: ke konceptu matematického *důkazu*.

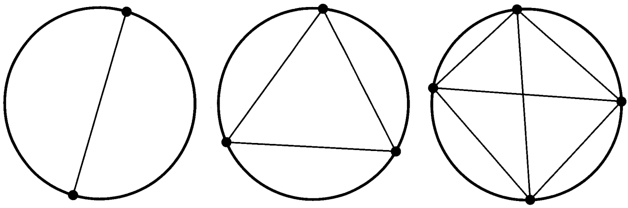
Jedním z důvodů, proč zdůrazňuji tuto myšlenku hned na začátku knihy, spočívá v tom, že v matematice je velice snadné dospět k nesprávnému závěru.

Obzvláště nebezpečné je zbrkle vyvodit nějaký obecný závěr na základě několika speciálních případů.

Pro příklad nemusíme chodit daleko. Vezmeme si kruh, vyznačíme na hraniční kružnici dva body a spojíme je úsečkou. V kruhu tak vzniknou dvě oblasti.

Nyní vyznačíme na kružnici tři body a opět spojíme každé dva z nich úsečkami. Teď je kruh rozdělen na čtyři oblasti.

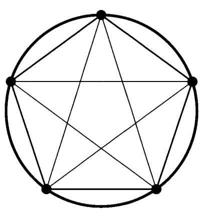
Provedeme-li totéž se čtyřmi body, dostaneme osm oblastí.



$n = 2$ $n = 3$ $n = 4$

Schéma je zřejmé, že ano? Zdá se, že se počet oblastí zdvojnásobí pokaždé, když přidáme další bod. Je tedy rozumné předpokládat, že pět bodů vyprodukuje šestnáct oblastí.

A také ano:



$n = 5$

V kterémžto bodě jistě usoudíme s patřičnou sebedůvěrou, že počet oblastí generovaných šesti body bude 32.

Vážení čtenáři, právě jste dočetli ukázku z knihy 1089 a další parádní čísla**.**
Pokud se Vám ukázka líbila, na našem webu si můžete zakoupit celou knihu.